

UNIVERSIDAD LABORAL DE ALCALÁ DE HENARES

ESCUELA UNIVERSITARIA DE

INGENIERÍA TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN

Especialidad: EQUIPOS ELECTRÓNICOS

1972-1975

SISTEMAS LINEALES. SISTEMAS REALIMENTADOS DE CONTROL. SERVOSISTEMAS

Teoría y Problemas-Ejemplo

	$F(s)$	$f(t) \quad 0 \le t$
11.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left[\alpha - \dfrac{b(\alpha-a)}{b-a}e^{-at} + \dfrac{a(\alpha-b)}{b-a}e^{-bt}\right]$
12.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
13.	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
14.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}]$
15.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
16.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
17.	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}\omega t$
18.	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
19.	$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t+\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
20.	$\dfrac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}(\omega t+\theta)$
21.	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
22.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{\alpha}{\omega^2}-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
23.	$\dfrac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\operatorname{sen}(\omega t-\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{a}$
24.	$\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{-at}\operatorname{sen}bt$
24a.	$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$
25.	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
26.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}$
27.	$\dfrac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
27a.	$\dfrac{1}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{1}{\omega_n^2}-\dfrac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\cos^{-1}\zeta$

$F'(t) = p\,f(p) - F(0)$

$F''(t) = p^2 f(p) - p\,F(0) - F'(0)$

$F'''(t) = p^3 f(p) - p^2 F(0) - p\,F'(0) - F''(0)$

	$F(s)$	$f(t) \quad 0 \le t$
28.	$\dfrac{s+\alpha}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}}\,e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
29.	$\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2}+\dfrac{e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi)}{b\sqrt{(c-a)^2+b^2}} \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
30.	$\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c(a^2+b^2)}+\dfrac{e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+\dfrac{e^{-at}\operatorname{sen}(bt-\phi)}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}+\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
31.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{c(a^2+b^2)}+\dfrac{(c-\alpha)e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
32.	$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$
33.	$\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
34.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}[\alpha-\alpha e^{-at}+a(a-\alpha)te^{-at}]$
35.	$\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_0}{ab}+\dfrac{a^2-\alpha_1 a+\alpha_0}{a(a-b)}e^{-at}-\dfrac{b^2-\alpha_1 b+\alpha_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
36.	$\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha_0}{c^2}+\dfrac{1}{bc}[(a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0)^2$ $+b^2(\alpha_1-2a)^2]^{1/2}e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b(\alpha_1-2a)}{a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0}-\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$ $c^2=a^2+b^2$
37.	$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{(1/\omega)\operatorname{sen}(\omega t+\phi_1)+(1/b)e^{-at}\operatorname{sen}(bt+\phi_2)}{[4a^2\omega^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2]^{1/2}}$ $\phi_1=\tan^{-1}\dfrac{-2a\omega}{a^2+b^2-\omega^2}$ $\phi_2=\tan^{-1}\dfrac{2ab}{a^2-b^2+\omega^2}$

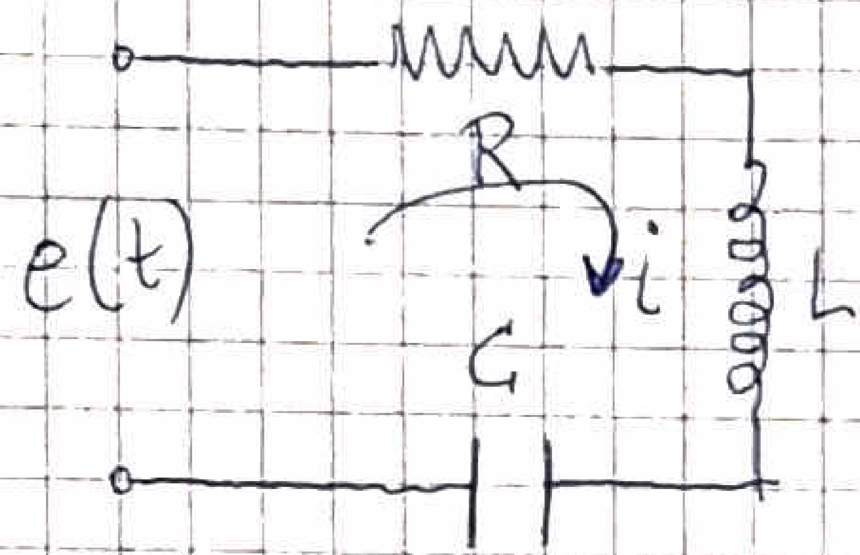
1er Tema: Planteo de las ecuaciones diferenciales de un sistema físico y su resolución.

Una ecuación diferencial lineal es del tipo $a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_n y + a_{-1} \frac{d^{-1} y}{dt^{-1}} + \dots + a_{-m} \frac{d^{-m} y}{dt^{-m}} =$
$= e(t)$. (1)

Nota: los subíndices negativos representan expresiones integrales.

Los coeficientes $a_0 \dots a_n \dots a_{-m}$ pueden ser variables o ctes. Utilizaremos los últimos.

Ej.: Planteo de la ecuación diferencial de un circuito R-L-C



$e(t) = V_R + V_L + V_C$; $V_R = R \cdot i$; $V_L = L \frac{di}{dt}$; $V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i\,dt$

$e(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i\,dt$

Los coeficientes ctes. son R, L y $1/C$ análogos a: a_m, a_{n-1} y a_{-m} $(m = +1)$

Este es un circuito con ecuación diferencial lineal de 1er orden. Como máximo, estudiaremos las de 2° orden.

§ OPERADOR D

$Dy = \frac{dy}{dt}$; $D^n y = \frac{d^n y}{dt^n}$; $D^{-1} y = \int_{-\infty}^{t} y\,dt$;

$D^{-n} y$ = n integrales sucesivas de y con respecto a dt

La ecuación (1) quedará: $a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots a_n y + a_{-1} D^{-1} y + \dots + a_{-m} D^{-m} y = e(t)$

sacando factor común y: $\underbrace{(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n + \dots + a_{-1} D^{-1} + \dots + a_{-m} D^{-m})}\, y = e(t)$

$P(D)$ = polinomio característico de la ecuación considerada

Ej.: $P(D) = D^2 + aD + b$.

§ Propiedades del operador D:

a) Tiene que ser lineal: para no alterar la linealidad de la ecuación dada. Para que sea lineal ha de cumplir dos propiedades o condiciones:

1ª) $P(D)\,[y_1 + y_2] = P(D)\,y_1 + P(D)\,y_2$

Ej.: $(D+a)\,[y_1 + y_2] = Dy_1 + ay_1 + Dy_2 + ay_2 = (D+a)\,y_1 + (D+a)\,y_2$;

2ª) $P(D)\,Ky = K \cdot P(D)\,y$

b) propiedad Conmutativa: $[P_1(D) \cdot P_2(D)]\,y = [P_2(D) \cdot P_1(D)]\,y$

Ej.: $P_1 = (D^2 + aD + b)$

$P_2 = (D + c)$

$P_1 \cdot P_2 = D^3 + (c+a)\,D^2 + (ca+b)\,D + bc = P_2 \cdot P_1$

c) La solución de la ecuación diferencial homogénea es de la forma e^{rt}. Vamos a ver qué ocurre si en lugar de aplicar directamente $P(D)$ sobre y, lo aplicamos al producto: $e^{rt} \cdot y$; es decir $P(D)\,e^{rt} \cdot y$

Ej.: $(D+a)\,e^{rt} \cdot y = r e^{rt} y + e^{rt} Dy + a e^{rt} y = e^{rt}\,[D + a + r]\,y$;

$P(D)\,e^{rt} y = e^{rt} \cdot P(D+r)\,y$

Es decir en el polinomio característico donde halla D, habrá que poner $D+r$.

Volvamos al ejemplo del circuito RLC:

$V_{L(t)} = L \dfrac{di}{dt} = L \cdot D\,i_{(t)}$; $i = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} V_L \, dt = \dfrac{1}{L} D^{-1} V_L = \boxed{\dfrac{1}{LD} V_L}$

$V_C = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i\,dt = \dfrac{1}{C} D^{-1} i = \dfrac{1}{CD}\,i$; $i = C \dfrac{dV_C}{dt} = \boxed{C D V_C}$

Estableciendo una analogía entre estas expresiones y las impedancias de una bobina y un condensador tenemos:

$Z_L = j\omega L$; $i = \frac{V_L}{j\omega L}$ // $i = \frac{V_L}{LD}$ vemos que $j\omega$ viene sustituido por D

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$; $i = V_C \cdot j\omega C$ // $i = C D V_C$ " , $j\omega$ " " " D.

Si aplicamos transformada de Laplace en $V_{L(t)} = L \frac{di}{dt} = L D i_{(t)}$; para pasar del dominio de tiempos, al dominio de frecuencias:

$V_{L(s)} = LSI - f(I_0)$; donde la variable S tiene la forma compleja $\sigma + j\omega$, pero haciendo $\sigma = 0$, ya que en los sistemas físicos, no tiene sentido que S tenga parte real.

Por tanto: $V_{L(s)} = LSI - f(I_0) = j\omega L I$; siendo $f(I_0)$ una condición inicial (por ej.: corriente que puede haber almacenada en la bobina).

§ Repaso de los Circuitos Eléctricos

Ej.: Aplicar nudos al problema 2-8.

a) Por mallas: 1ª malla: $e = \left(L_1 D + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 - L_1 D i_2 - \frac{1}{C_1 D} i_3$

etc.

b) Por nudos: $0 = V_a \left(C_1 D + \frac{1}{L_1 D} + \frac{1}{R_1}\right) - C_1 D \cdot e - V_b \cdot \frac{1}{R_1}$

$0 = V_b \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_2 D\right) - \frac{V_a}{R_1} - \frac{e}{R_2} - V_c \cdot C_2 D$

$0 = V_c \left(C_2 D + \frac{1}{R_3}\right) - V_b \cdot C_2 D$

En los sistemas mecánicos utilizaremos el método de los nudos.

§ ESTUDIO DE LOS SISTEMAS MECANICOS DE TRASLACION.—

En el circuito eléctrico la fuente de energía son generadores.
El sistema mecánico de traslación es aquel en el cual el móvil ante la acción de una fuerza se mueve en línea recta.
En el sistema mecánico de rotación, la fuerza excitadora es un par. En un c. m. de t. tenemos los siguientes componentes pasivos: M o momento de inercia, los resortes o muelles y los rozamientos.
En los sistemas mecánicos; "la suma algebraica de las fuerzas en cada nudo es igual a cero", (tanto las fuerzas de excitación como las de reacción).

En un circuito eléctrico teníamos los siguientes componentes activos:

$$i_L = \frac{1}{L}\int v\,dt = \frac{1}{LD}V \quad ; \quad i_C = CDV$$

Las fuerzas de reacción de los componetes (M, K, B) son:
Componente masa M



x = desplazamiento.

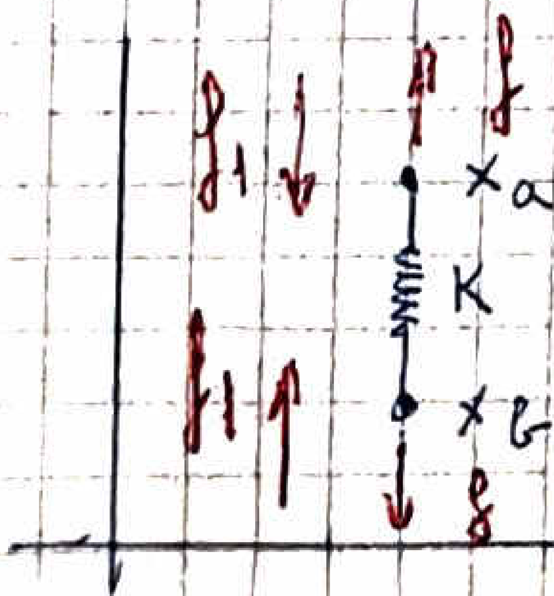
$$f = M \cdot a = f_m = M \cdot D \cdot v = M D^2 x$$

Analogías

$$\begin{cases} i_C = C \cdot D \cdot V \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ f_m = M\,D\,v \end{cases}$$

S. Electricos		S. mecánicos
Corriente	←análoga→	fuerza
Capacidad	←→	masa
tensión	←→	velocidad

Un resorte se representa por



X_a y X_b son coordenadas. Al estirar se producirá un desplazamiento y la coordenadas pasaran de $X_a \xrightarrow{a} X_a + \Delta x$ y de $X_b \xrightarrow{a} X_b + \Delta x$

Para que el sistema esté en equilibrio habrá de cumplirse: $f = f_1 = K \cdot \Delta x$; es decir la fuerza es proporcional al desplazamiento.
En realidad la ecuación es $f = f_1 = K \cdot \Delta x + K_1 (\Delta x)^2 + \dots$ lo que ocurre es que los desplazamientos son infinitesimales y despreciamos sus potencias. Por lo tanto la ecuación a utilizar es $f_K = K \cdot X$

ROZAMIENTO B

$F_B = B(v_e - v_y)$ la fuerza es directamente proporcional a la diferencia de velocidades de los dos cuerpos que están rozando. Si uno de ellos está parado $v_y = 0$

$$F_B = B v_e + F_{B(v=0)} + F_C \left(\frac{v}{|v|}\right) + B_1 (v_e)^2$$

f. estática de rozamiento — se desprecian

Quedará $\boxed{f_B = B \cdot v = B \cdot Dx}$

Análogas



$i_L = \frac{1}{LD} V$

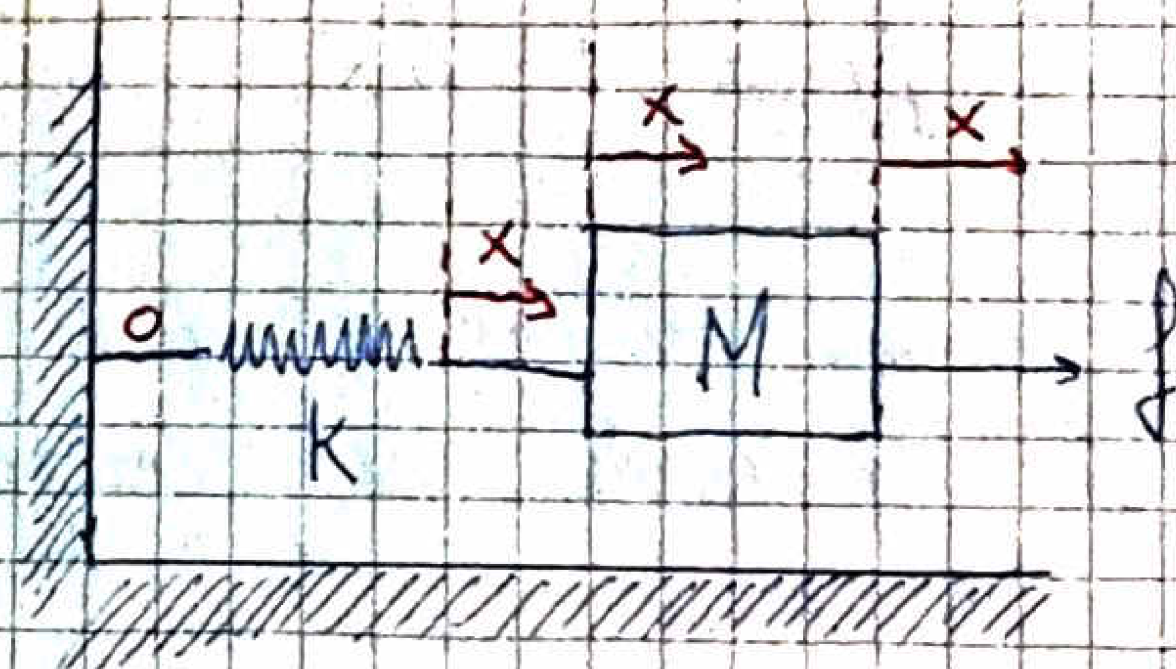
$f_K = K \cdot X = K \int v\,dt = \frac{K}{D} v$

corriente i_L análoga f_K (fuerza)
V (tensión) → análoga a v (velocidad)
K (resorte) → análoga a $\frac{1}{L}$

$f_B = B \cdot v = B \cdot Dx = B v$
$i = \frac{v}{R}$

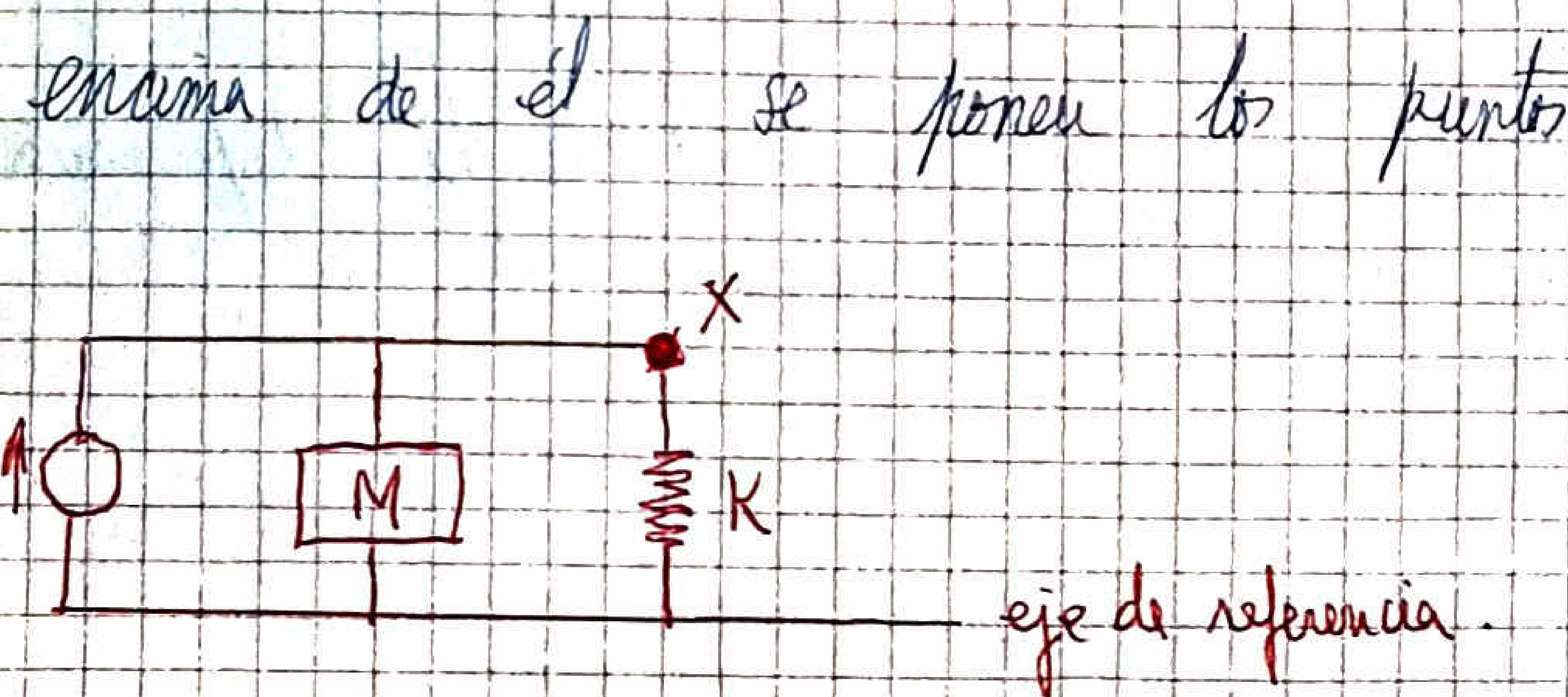
B análoga a $\frac{1}{R}$

Ej.:



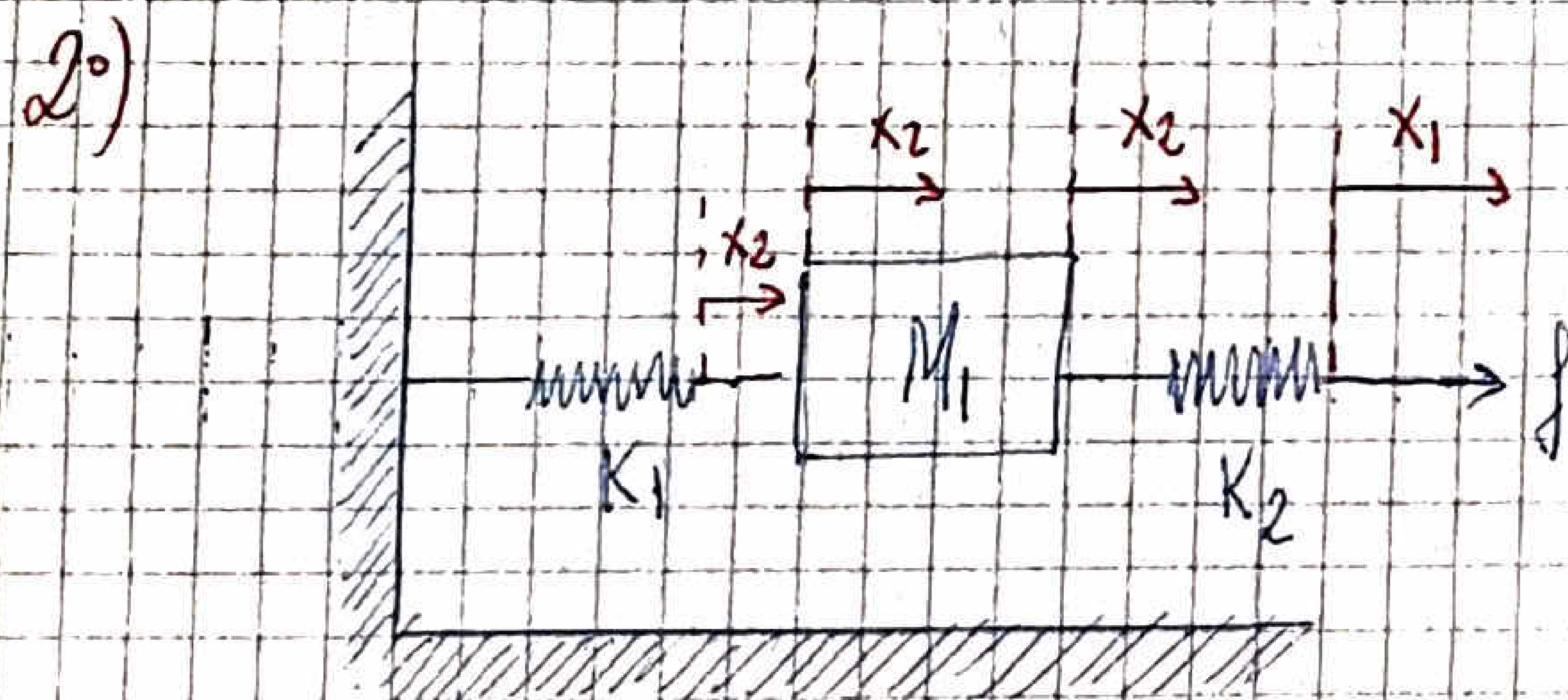
1º) Cuanto desplazamientos distintos hay
Sólo hay uno: el x.
Las masas no se pueden comprimir ni extender, por tanto todos sus puntos se desplazan igual.

2º) Representación: Se toma un eje de referencia. Por encima de él se ponen los puntos que tienen distintos desplazamientos. En este caso uno.

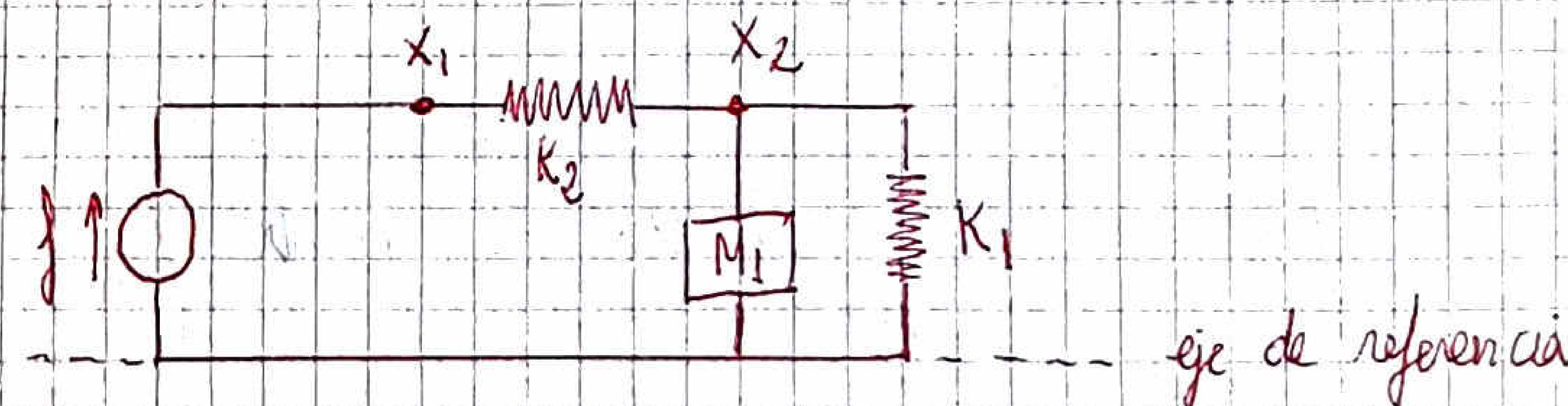


En el dibujo del sistema un extremo del resorte K está sobre el eje de referencia y el otro tiene el desplazamiento x.
Luego en la representación también estará entre esos puntos.
Las masas se representarán entre el punto de su desplazamiento y el eje de referencia.
Las fuerzas entre el desplazamiento que provoca y el eje de referencia.

2º)

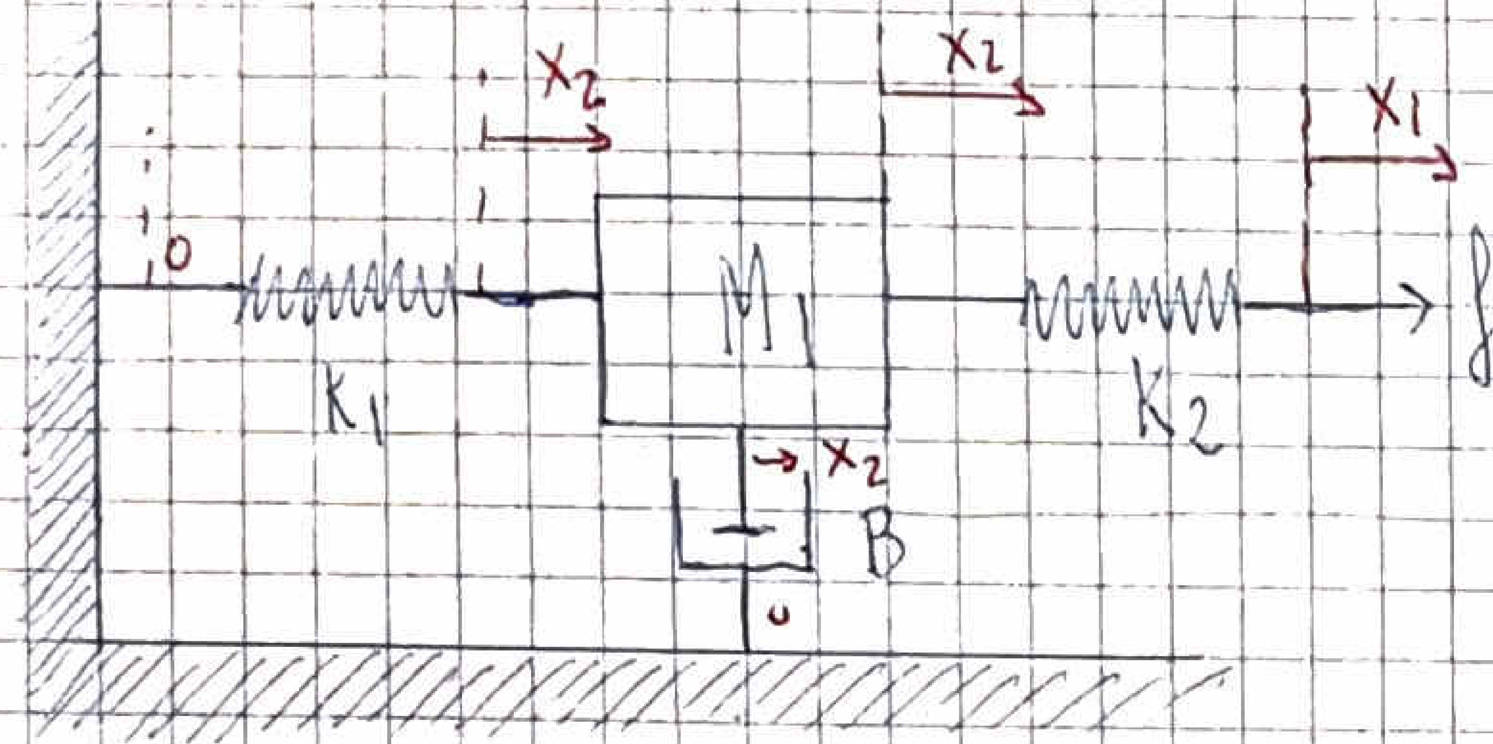






El resorte K_2 se representa entre los dos desplazamientos. La masa entre su desplazamiento x_2 y el eje de referencia (que es el siguiente y distinto desplazamiento $x=0$). El resorte K_1 está entre los mismos desplazamientos distintos que la masa: x_2 y 0 ó nivel de referencia. Vemos que cada elemento se representa entre dos desplazamientos distintos próximos.

Introducimos ahora otro componente: ROZAMIENTO B



Se representa como un condensador electrolítico
Un extremo del rozamiento no se mueve, porque está en el sistema de referencia. El otro extremo se mueve con el mismo desplazamiento de la masa o intenta moverse

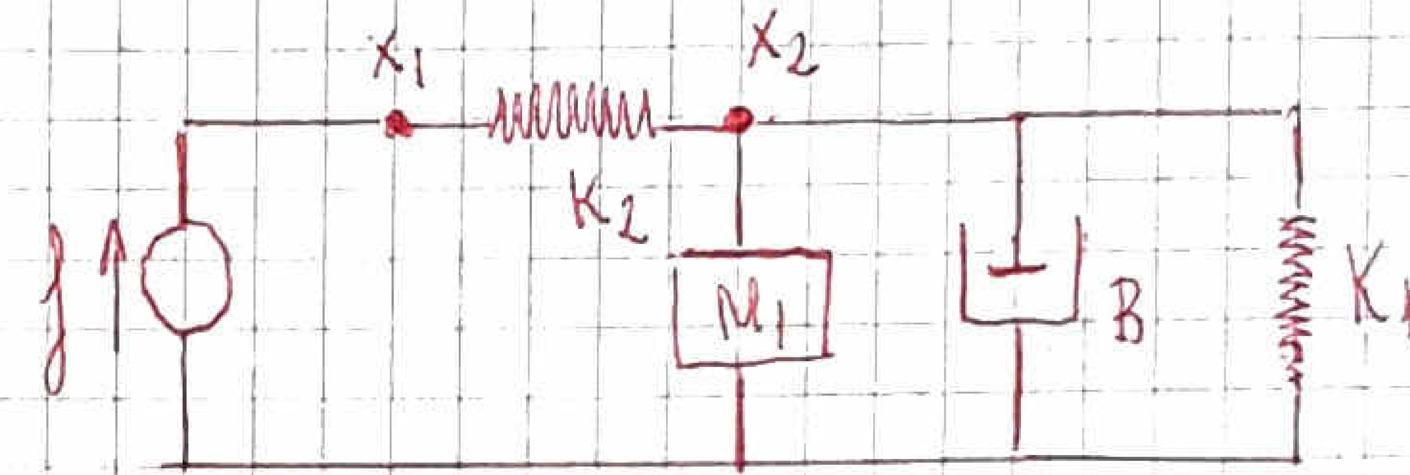
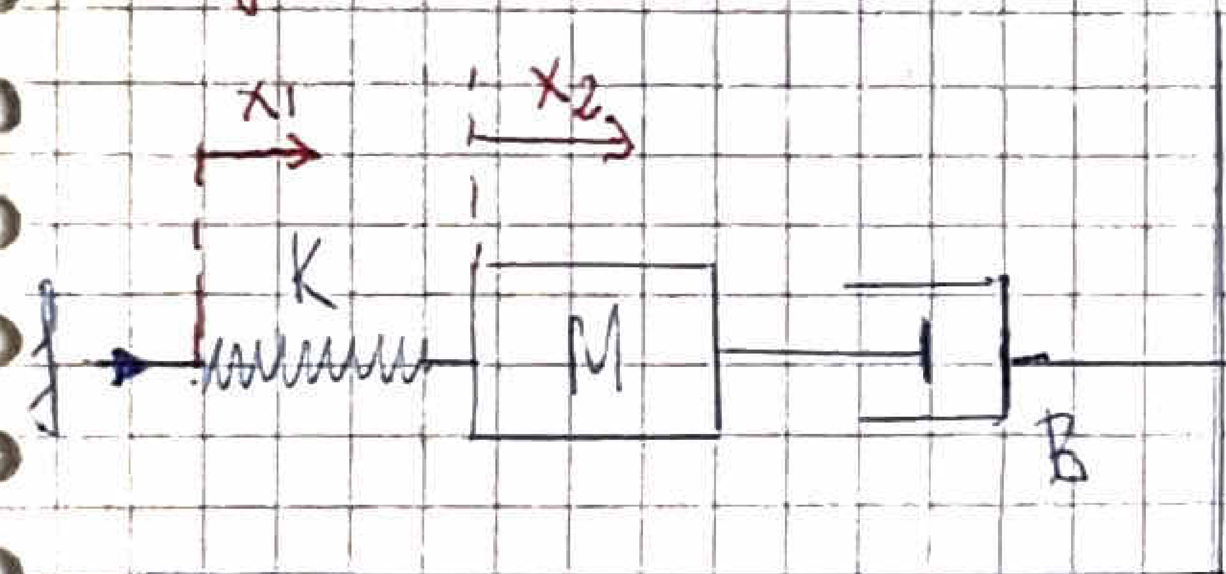
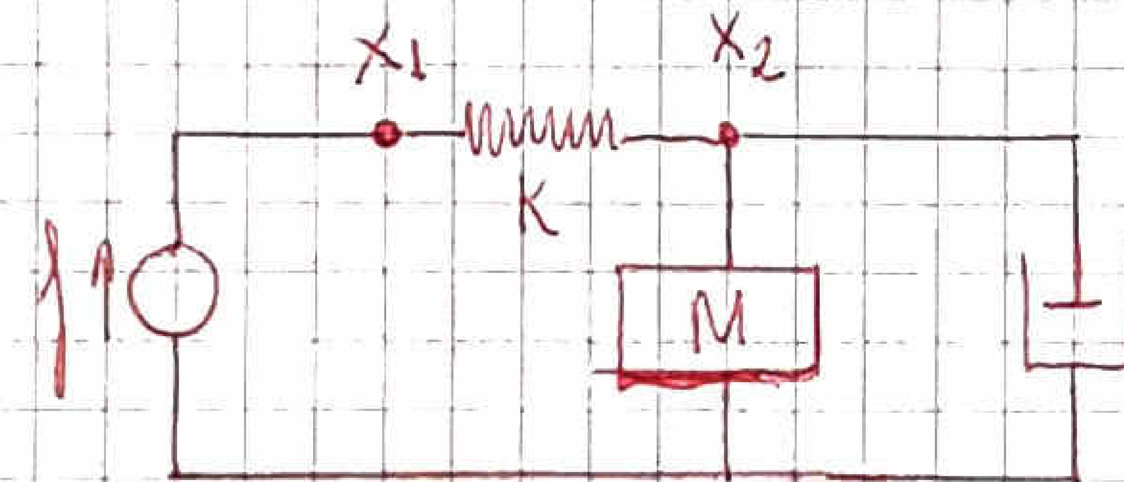


Fig 2-7. Pag 41

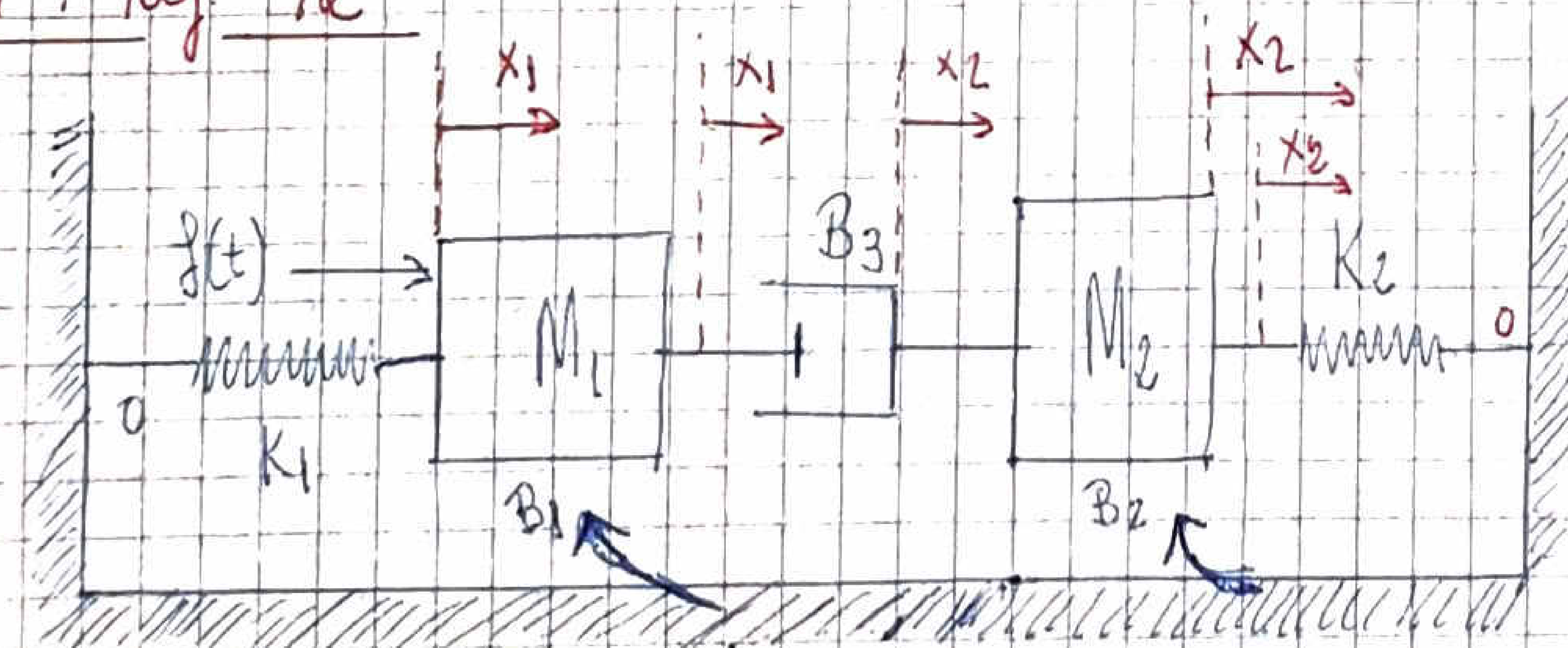


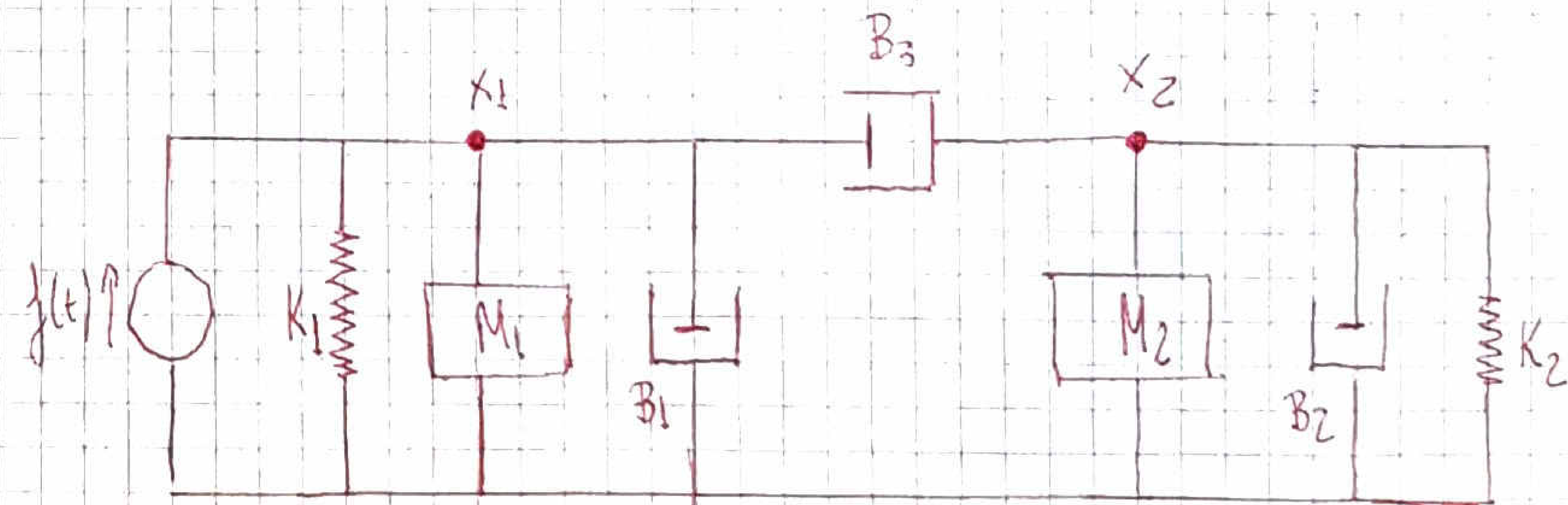


Planteando por nudos. Sólo hay un nudo el x_2

$$0 = -Kx_1 + (MD^2 + BD + K)x_2$$

Fig 2-9. Pag 42



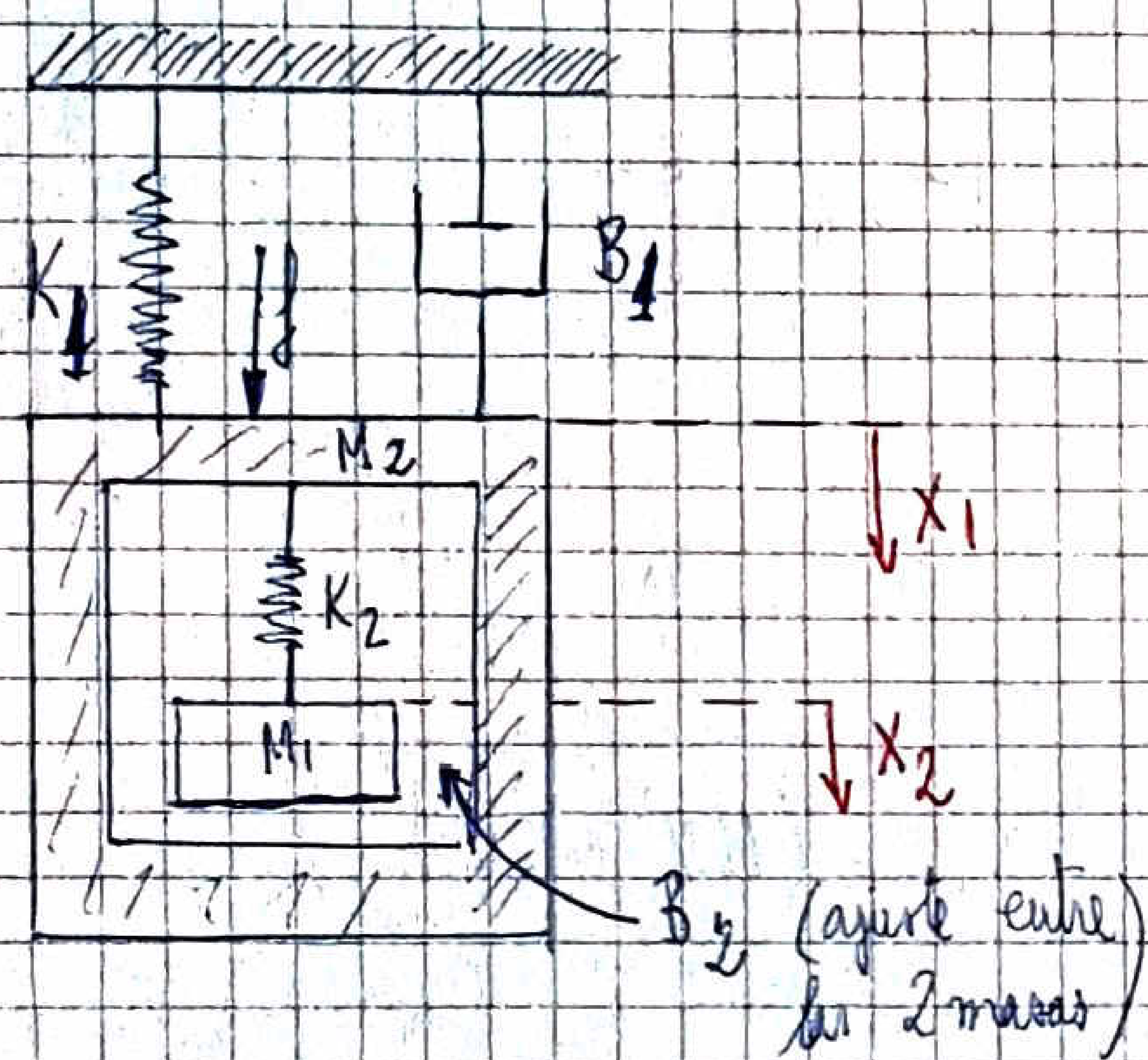


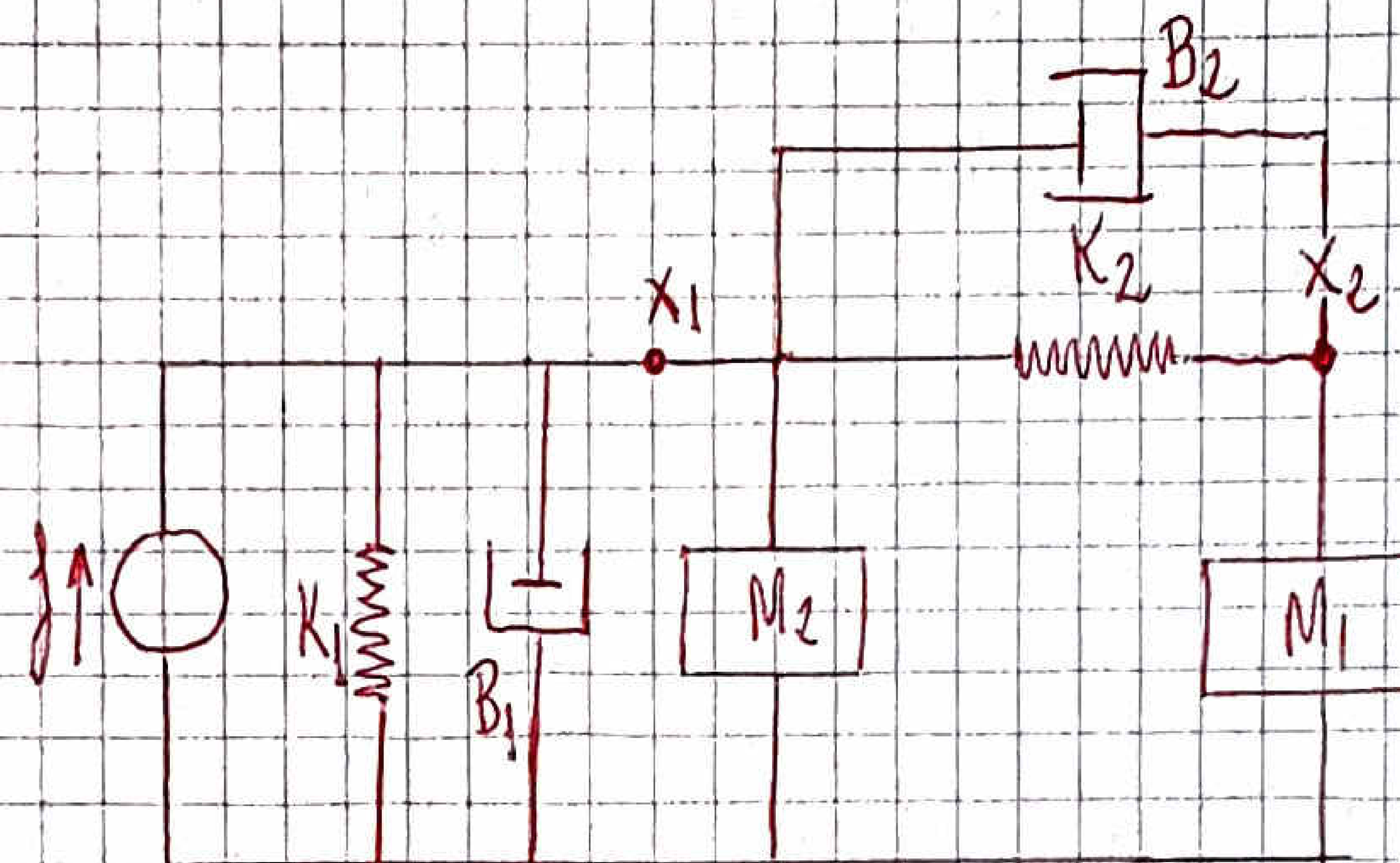
Planteado por nudos tenemos:

$$f(t) = (M_1 D^2 + B_1 D + K_1 + B_3 D) X_1 - (B_3 D) X_2$$

$$0 = (M_2 D^2 + B_2 D + B_3 D + K_2) X_2 - (B_3 D) X_1$$

Problema 2-1

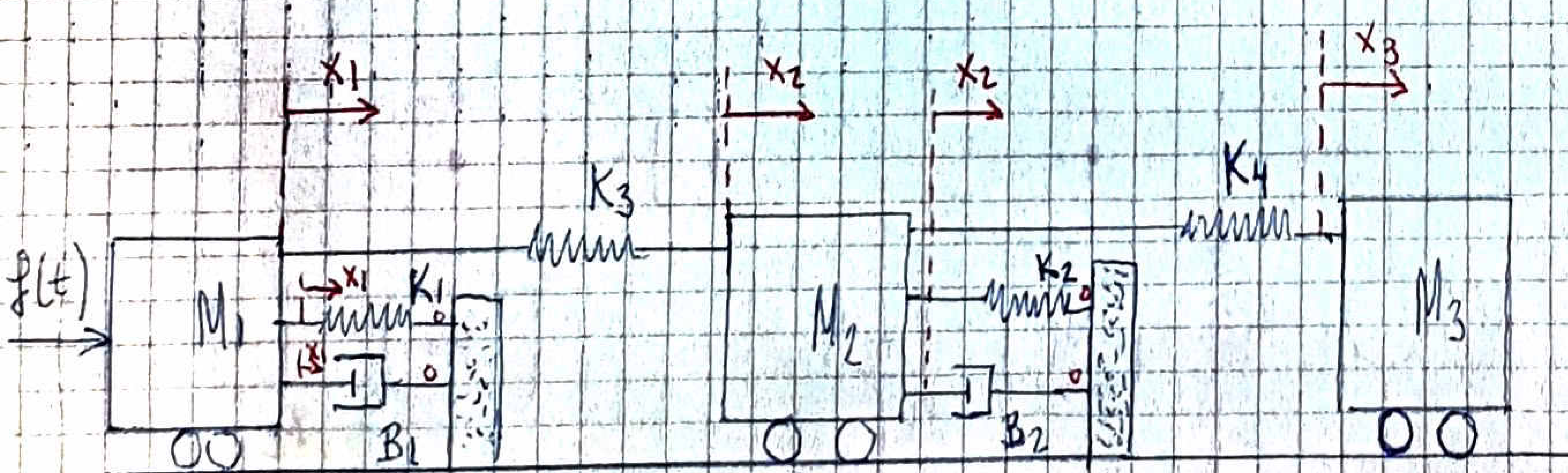


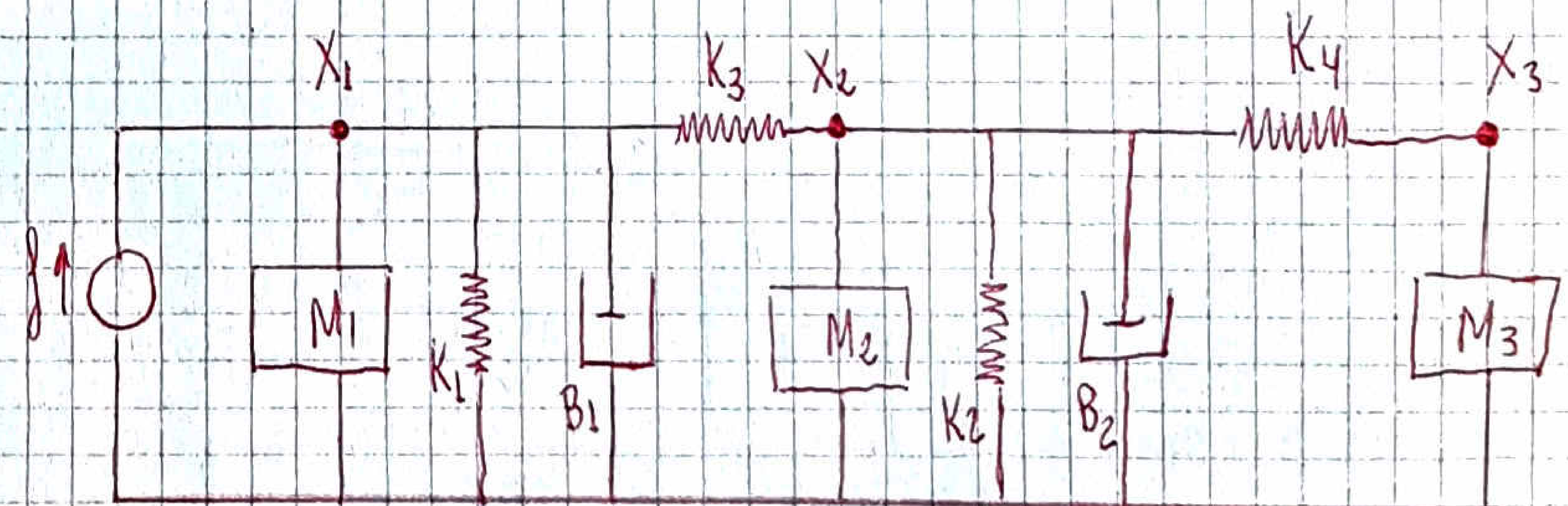


$$f = (M_2 D^2 + B_1 D + B_2 D + K_1 + K_2) X_1 - (B_2 D + K_2) X_2$$

$$0 = -(B_2 D + K_2) X_1 + (M_1 D^2 + B_2 D + K_2) X_2$$

Problema 2-6





nudo X_1 : $f = (M_1 D^2 + B_1 D + K_1 + K_3) X_1 - K_3 X_2$

nudo X_2 : $0 = -K_3 X_1 + (M_2 D^2 + B_2 D + K_2 + K_3 + K_4) X_2 - K_4 X_3$

nudo X_3 : $0 = -K_4 X_2 + (M_3 D^2 + K_4) X_3$

} En función de los desplazamientos X

---

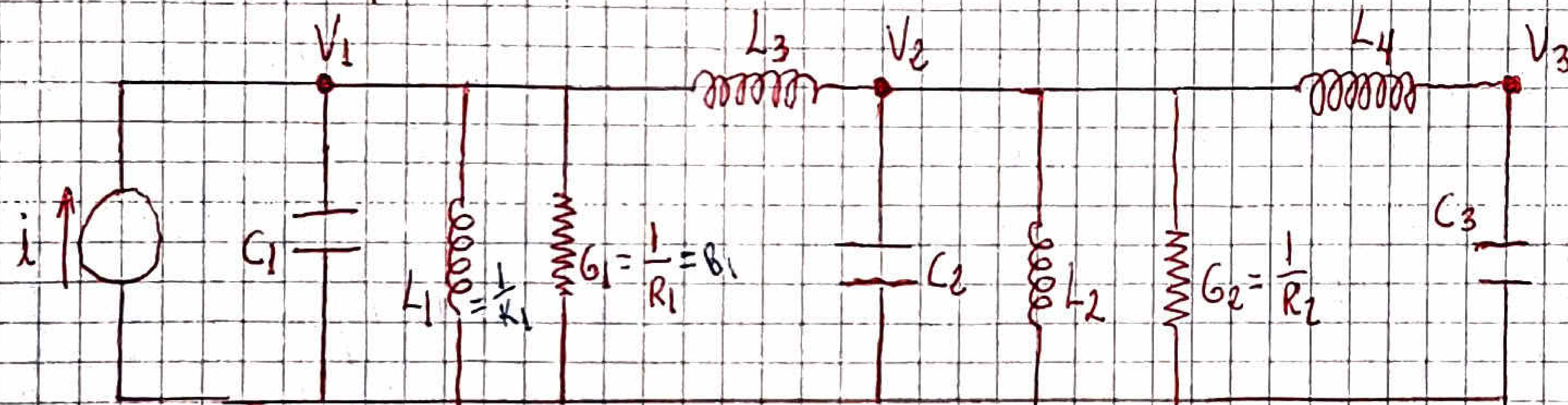
nudo X_1 : $f = \left(M_1 D + B_1 + \frac{K_1}{D} + \frac{K_3}{D}\right) DX_1 - \frac{K_3}{D} DX_2$

nudo X_2 : $0 = -\frac{K_3}{D} DX_1 + \left(M_2 D + B_2 + \frac{K_2}{D} + \frac{K_3}{D} + \frac{K_4}{D}\right) DX_2 - \frac{K_4}{D} DX_3$

nudo X_3 : $0 = \left(-\frac{K_4}{D}\right) DX_2 + \left(M_3 D + \frac{K_4}{D}\right) DX_3$

} En función de las velocidades DX

Circuito Eléctrico Equivalente



nudo V_1 : $i = \left(C_1 D + G_1 + \frac{1}{L_1 D} + \frac{1}{L_3 D}\right) V_1 - \left(\frac{1}{L_3 D}\right) V_2$

nudo V_2 : $0 = -\left(\frac{1}{L_3 D}\right) V_1 + \left(C_2 D + G_2 + \frac{1}{L_2 D} + \frac{1}{L_3 D} + \frac{1}{L_4 D}\right) V_2 - \left(\frac{1}{L_4 D}\right) V_3$

nudo V_3 : $0 = -\left(\frac{1}{L_4 D}\right) V_2 + \left(C_3 D + \frac{1}{L_4 D}\right) V_3$

} Son análogas a las del circuito mecánico cuando están en función de las velocidades DX :

$i \rightarrow f$

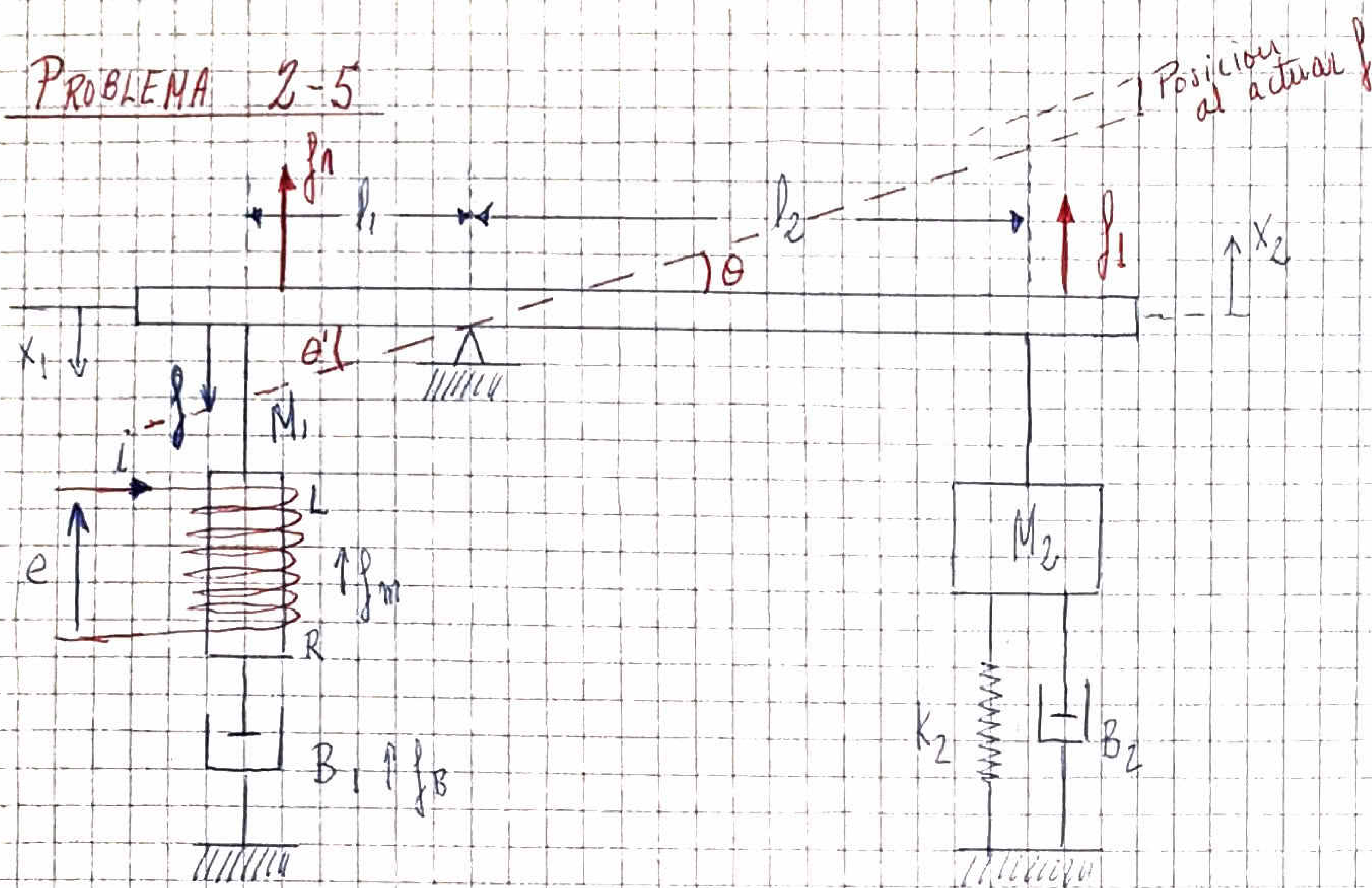
$C \rightarrow M$

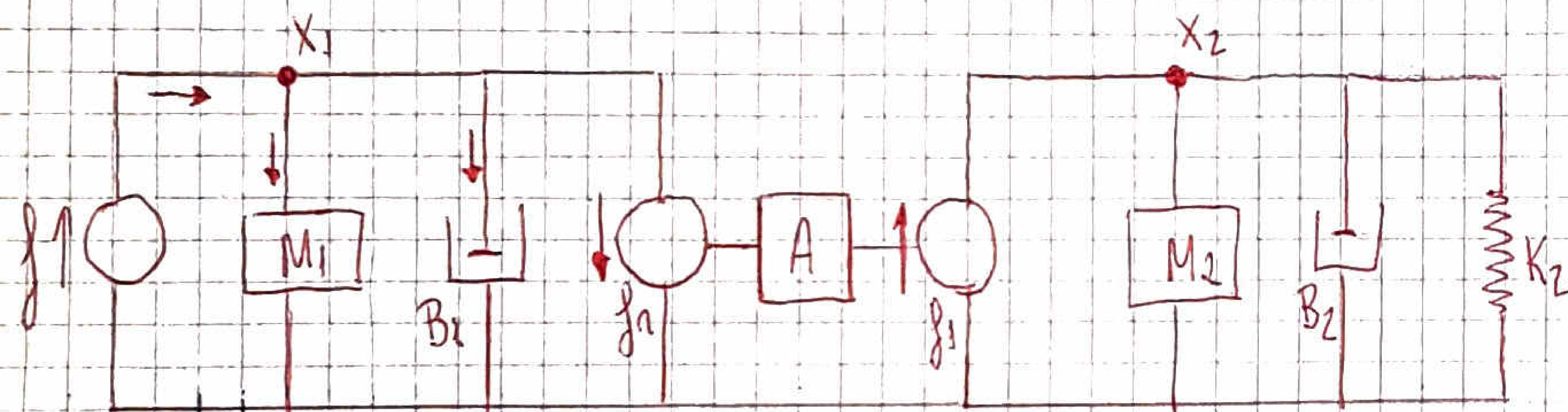
$G = \frac{1}{R} \rightarrow B$

$1/L \rightarrow K$

$v = DX \rightarrow V$

PROBLEMA 2-5





El sentido de la basculación depende del sentido de la tensión e.

La palanca bascula al originar el electroimán la fuerza $f = K \cdot i$

f_r = fuerza de reacción del punto de apoyo

f_1 = fuerza de acción correspondiente a f_r

Por la ley de la palanca tenemos:

$$f_r \cdot l_1 = f_1 \, l_2$$

La fuerza que origina un electroimán es:

$$f = K i = K \frac{e}{R + L D}$$

siendo $R + LD$ la impedancia del electroimán.

La fuerza f aplicada (debida al electroimán) se emplea en vencer: la fuerza inerte de reacción de la masa (f_m), la fuerza reactiva del rozamiento (f_B), y la fuerza también reactiva f_r que opone el resto del sistema como consecuencia de existir un punto de apoyo.

Nos pueden pedir por ej. el desplazamiento x_2 en función de la fuerza exterior del sistema. Como ambas partes, la correspondiente a x_2 y la de f no están ligadas. Suponemos entre f_1 y f_r la existencia de un bloque —[A]— que quiere decir: $f_1 = A f_r$ ó lo que es lo mismo que f_1 es un generador dependiente de f_r. A su vez f_r es dependiente

de f. Como por la ley de la palanca: $f_2 l_1 = f_1 l_2$, tendremos: $f_1 = \frac{l_1}{l_2} f_2$

y comparando: $\boxed{A = \frac{l_1}{l_2}}$

para el nudo X_1 la fuerza exterior aplicada es: $f = (M_1 D^2 + B_1 D) X_1 + f_2$

en el otro nudo X_2: $f_1 = (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) X_2$

Ahora bien f_2 y f_1 son fuerzas internas del sistema. Hay que tratar de poner los desplazamientos X_1 y X_2 en función de la fuerza exterior aplicada.

$f_2 = \frac{l_2}{l_1} f_1 = \frac{l_2}{l_1} (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) X_2$, sustituyendo: $f = (M_1 D^2 + BD) X_1 + \frac{l_2}{l_1} (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) X_2$

y ya tenemos X_1 y X_2 en función de la fuerza exterior aplicada f.

Al bascular la balanza se producen los ángulos θ y θ' que por ser opuestos por el vértice son iguales. Sus tangentes también serán iguales:

$$\frac{X_2}{l_2} = \frac{X_1}{l_1} \begin{cases} \Longrightarrow X_1 = \frac{l_1}{l_2} X_2 \\ \Longrightarrow X_2 = \frac{l_2}{l_1} X_1 \end{cases}$$

Si nos piden la fuerza f en función del desplazamiento X_1, sustituimos X_2 por $\frac{l_2}{l_1} X_1$

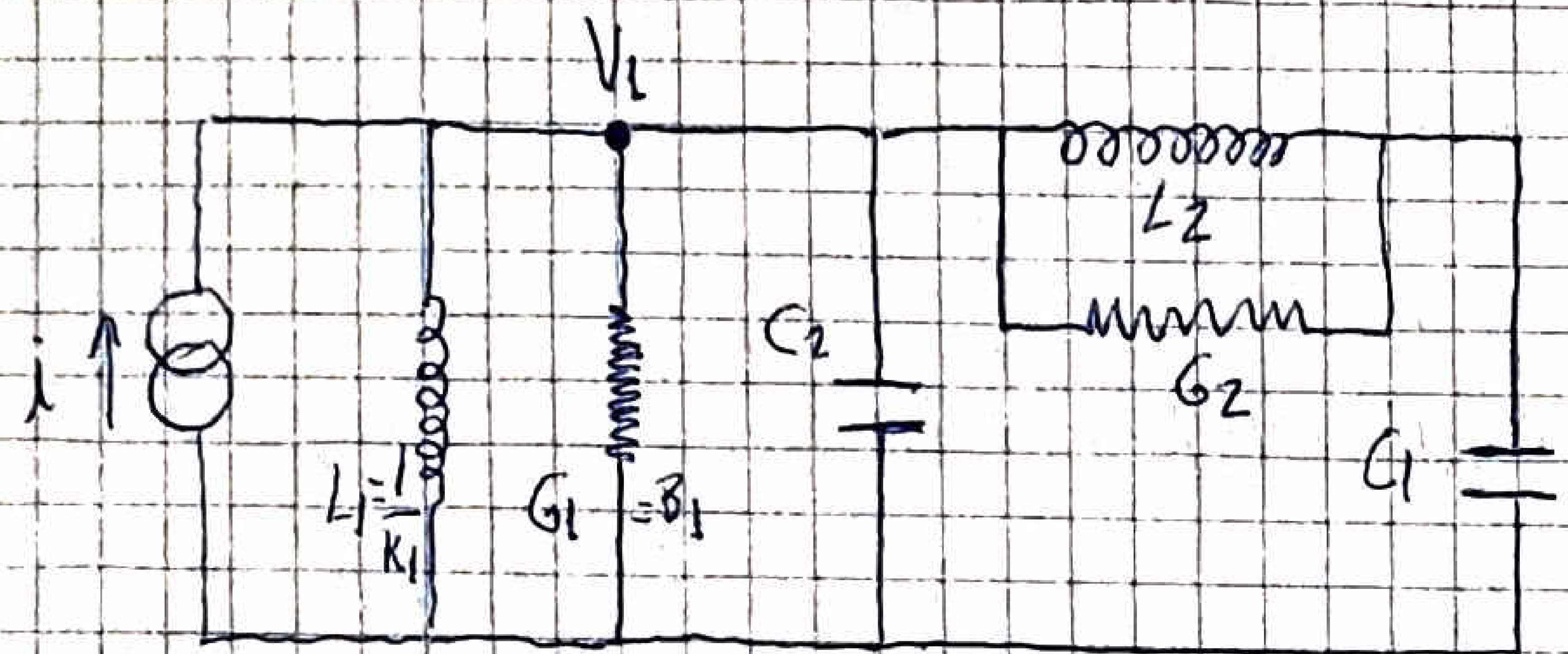
" " " " " " X_2, " X_1 por $\frac{l_1}{l_2} X_2$

En forma eléctrica, la ecuación sería:

$K \frac{e}{R+LD} = (MD^2 + BD) X_1 + \frac{l_2}{l_1} (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) X_2$, pero e, ha de dejarse sola en el 1er miembro

$e = \frac{R+LD}{K} \left[(MD^2 + BD) X_1 + \frac{l_2}{l_1} (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) \frac{l_2}{l_1} X_1 \right]$ y puesto todo con X_1

Problema 2-1 - Circuito Eléctrico Análogo



Podemos establecer otra analogía pero que no utilizaremos en nuestro estudio:

fuerza ⟶ análoga a ⟶ tensión
desplazamiento ⟶ " " ⟶ intensidad

El circuito eléctrico resultante será ~~análogo~~ dual del anterior (de nudos). Los elementos que estaban en este, en serie estarán ahora en paralelo y viceversa. Las ecuaciones se deducirán por mallas.

En el anterior teníamos: $f = \left(\frac{K_2}{D} + B_2 + M_2 D\right) D X_1$ el análogo será:

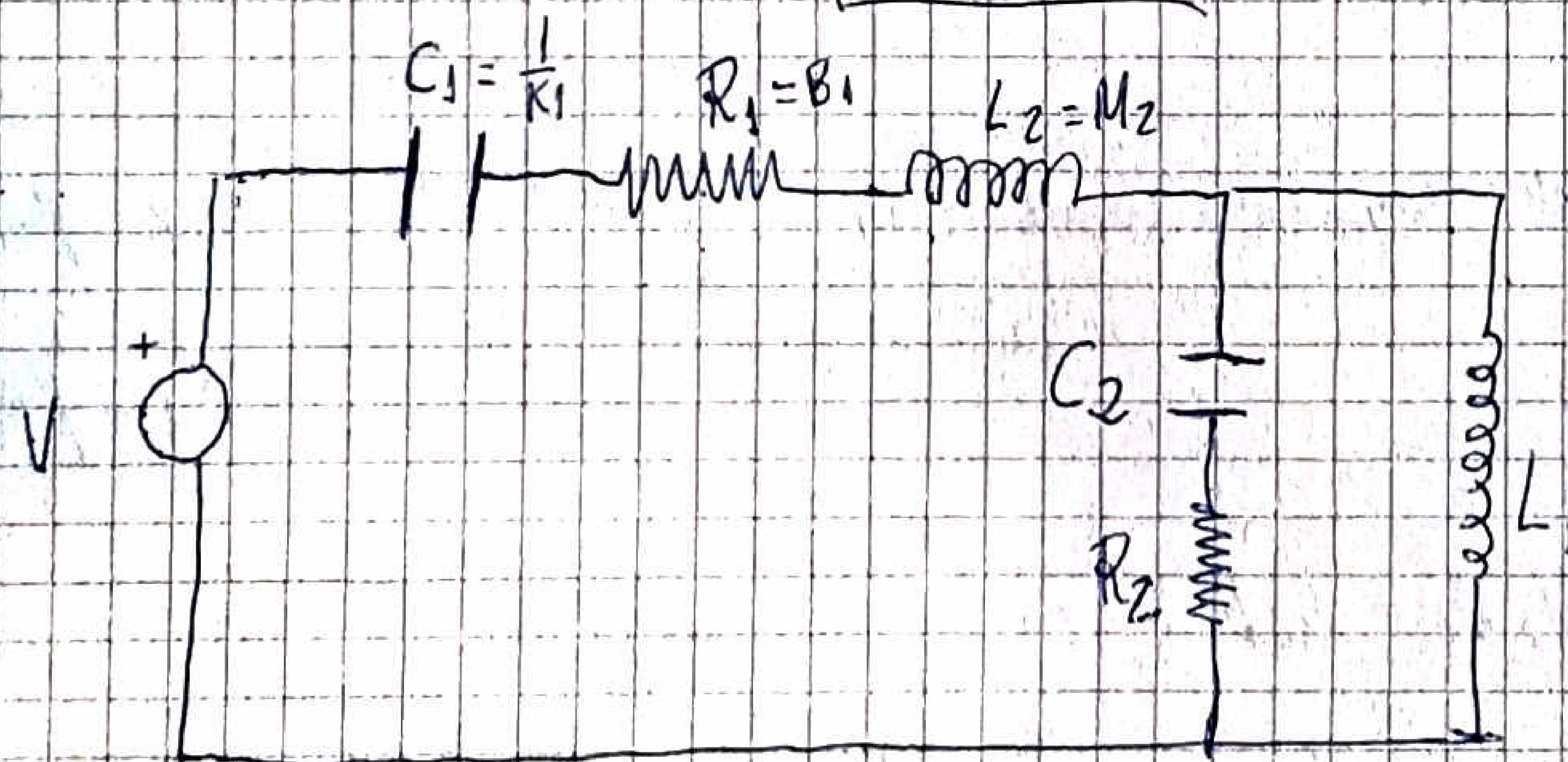
$$v = \left(\frac{1}{CD} + R + LD\right) i$$

ya que por ej.:

$$V_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{1}{CD}\, i$$

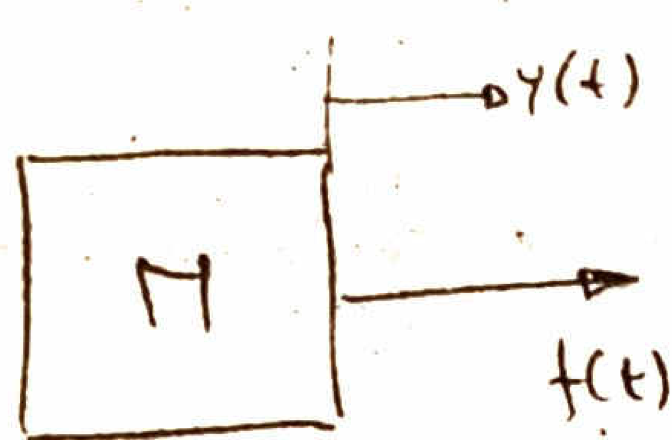
$C = \frac{1}{K}$; $B = R$; $M = L$;

El circuito será



SISTEMAS

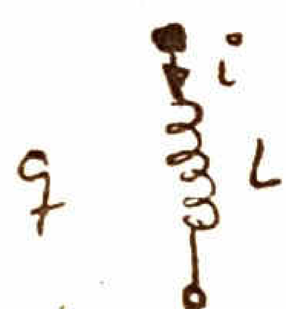
MODELOS MATEMATICOS EQUIVALENTES.



Tenemos una masa a la cual le aplicamos una fuerza que es funcion del tiempo lo cual provoca que Esta masa se mueve en funcion del tiempo un espacio $y(t)$. Eitando el espacio y la fuerza ligados por la 2ª formula de Newton

$$f(t) = M \frac{d^2y}{dt^2} = M \frac{dv}{dt}$$ Ecuacion de movimiento de esta masa

En un caso electrico segun la ley de Faraday

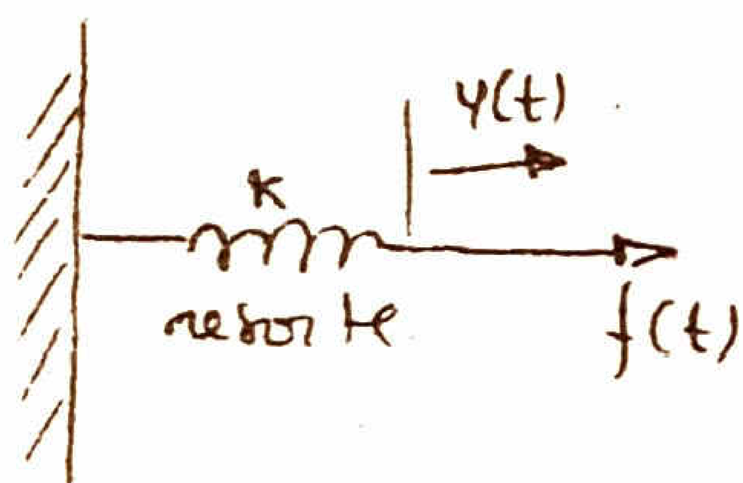


$$e(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} = L \frac{di}{dt}$$

las expresiones matemáticas son totalmente analogas.

$$\Delta(t) = K \frac{d^2B(t)}{dt^2} = K \frac{dD(t)}{dt}$$ luego el modelo matemático para estos dos caso es este. ΔDYB son variables y K es constante.

Partimos de unos principios básicos que en todos los elementos fisicos es igual difiere unicamente en las variables de trabajo. La ecuación es la misma. otros casos serian



$$f(t) = Ky(t)$$

El modelo matematico aplicable a estos casos es:

$\Delta(t) = KB(t)$ (Modelo matemático)

$$e(t) = Ri(t)$$

Todo se va a reducir a ecuaciones diferenciales de distinto orden. En todos los sistemas fisicos tendremos unas ecuaciones diferenciales que nos relacionaran las distintas variables y las constantes de cada sistema.

CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

TOTALES: Existe una sola variable independiente y varias dependientes (o una) todas las derivadas son con respecto a la independiente.

PARCIALES: Existen varias variables independientes.

Vamos a estudiar ecuaciones diferenciales invariables con el tiempo. $e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$ o tambien llamada implicita.

- Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Los componentes se consideran constantes.

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$$

No existen coeficientes constantes en realidad, sino que dependen del tiempo, pero esta variación con el tiempo es casi nula.

- Ecuaciones lineales y no lineales

Las lineales son las de 1er grado no tienen ningún termino de grado superior a uno.

$$y\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + k = f(t)$$

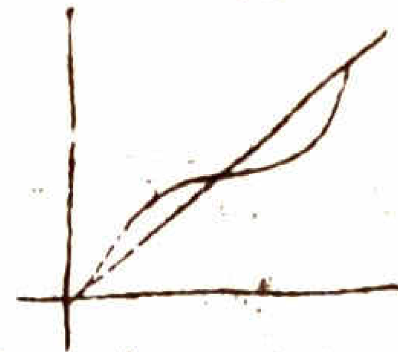
↳ orden 2 ↳ orden 1

Orden → mayor valor de la derivada.

grado → viene dado por el producto de y por ella misma o por el las derivadas parciales

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + k = f(t) \quad \text{no lineal}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + k = f(t) \quad \text{lineal.}$$



También se puede hallar la linealidad mediante una gráfica. Si es recta el sistema es lineal y si es curva no lo es.

- también hay ecuaciones variables con el tiempo

$e(t) = t\,R\,i(t) + C\frac{di}{dt}$ también llamada explicita.

Solo emplearemos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y son de la forma.

$$P_n \frac{d^ny}{dt^n} + P_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + P_1\frac{dy}{dt} + P_0 y = f(t)$$

las P son constantes o varían muy lentamente con el tiempo

Definimos el operador D.

$$D = \frac{d}{dt} \;//\; Dy = \frac{dy}{dt} \;//\; D^ny = \frac{d^ny}{dt^n} \;//\; D^0y = y \;//\; D^{-1}y = \int_{-\infty}^{t} y\,dt \;//\; D^{-n}y = \iiint_n y(dt)^n$$

aplicando el operador

$$P_n D^n y + P_{n-1}D^{n-1}y + \dots + P_0 y = f(t)$$

Sacando factor común y.

$$[P_n D^n + P_{n-1}D^{n-1} + \dots P_0]y = f(t)$$

Polinomio en D

$$\boxed{F(D)\,y = f(t)}$$

Hallando las raíces del polinomio lo podemos descomponer en tantos factores como raíces tenga el polinomio.

$$[P_n(D-m_1)(D-m_2)\dots(D-m_n)]y = f(t)$$

siendo $m_1, m_2, \dots m_n$ las raíces

con esto ya podemos directamente hallar la solución de la homogenea.

$$y = C_1 e^{-m_1 t} + C_2 e^{-m_2 t}$$

EJEMPLO:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$D^3y - D^2y - 4Dy + 4y = 0$$

$$(D^3 - D^2 - 4D + 4)\,y = 0$$

las raíces de este polinomio son 1, 2, -2 por lo que pondremos

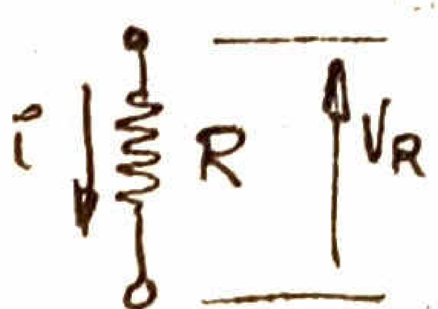
$$[(D-1)(D-2)(D+2)]y = 0 \qquad \text{Ecuación característica}$$

La solución de la homogenea es

$$y_h = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{2t}$$

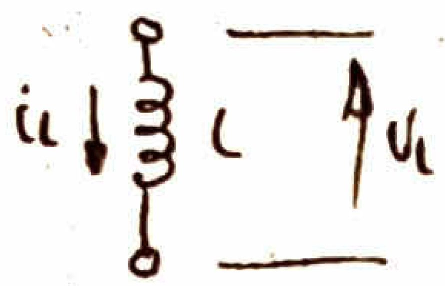
METODO DE PLANTEAR LAS ECUACIONES DE UN SISTEMA

CIRCUITO ELECTRICO



$V_R = Ri$ metodo de mallas

$i = \frac{1}{R}V_R = V_R\,G$ metodo de los nudos
↳ admitancia

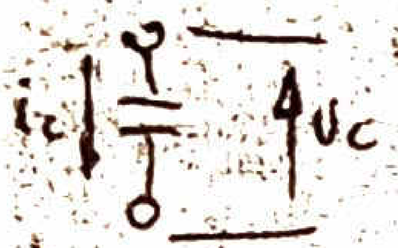


$v_L = L\frac{di_L}{dt} = L\,D\,i_L$ (mallas)

$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L\,dt = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} v_L\,dt + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v_L\,dt$

Io corriente inicial en bornas de la bobina

$i_L = \frac{1}{L}D^{-1}v_L = \frac{1}{LD}v_L$ (nudos)

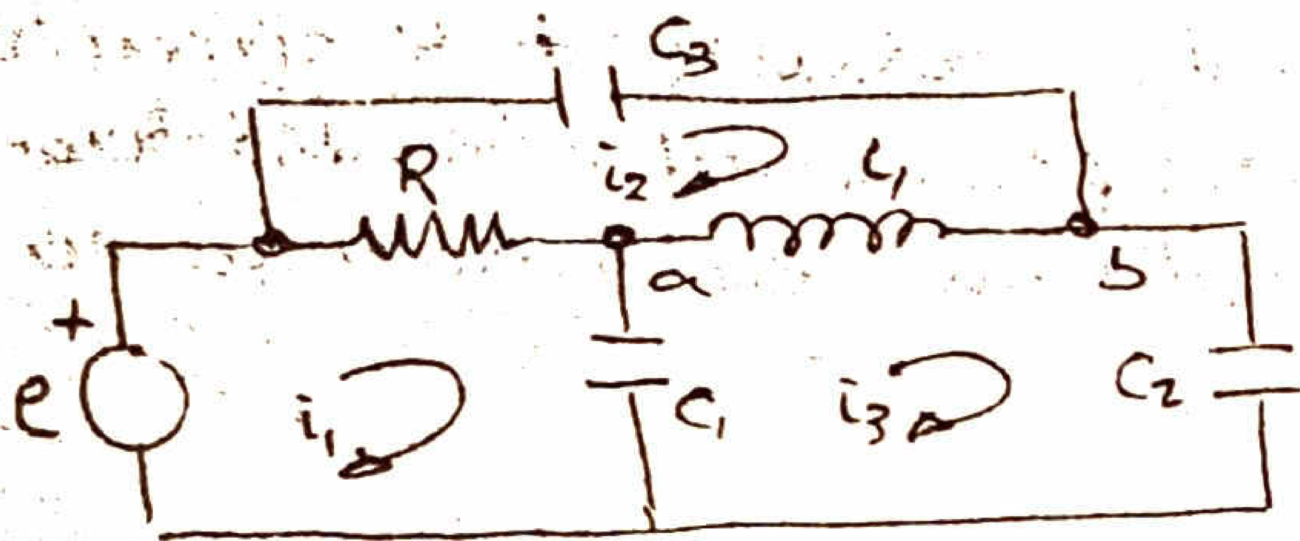


$v_c = \frac{q}{c} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i_c\,dt = \left(\frac{1}{CD}\right) i_c$ (mallas)

← impedancia

$i_c = C\frac{dv_c}{dt} = C\,D\,v_c$ (nudos)

Método de las mallas y los nudos.



mallas:

$e = \left(R + \frac{1}{C_1D}\right)i_1 - Ri_2 - \frac{1}{C_1D}i_3$

$0 = -Ri_1 + \left(R + L_1D + \frac{1}{C_3D}\right)i_2 - L_1Di_3$

$0 = -\frac{1}{C_1D}i_1 - L_1Di_2 + \left(\frac{1}{C_1D} + \frac{1}{C_2D} + L_1D\right)i_3$

Nudos

ya que suma de intensidades es 0

$0 = V_a\left(G + C_1D + \frac{1}{L_1D}\right) - V_b\left(\frac{1}{L_1D}\right) - e\cdot G$

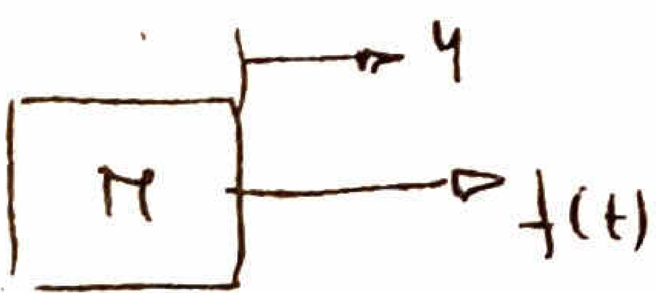
$0 = -V_a\frac{1}{L_1D} + \left(C_2D + C_3D + \frac{1}{L_1D}\right)V_b - e\,(C_3D)$

Vemos que es más sencillo por nudos porque sólo salen dos ecuaciones.

ESTABLECIMIENTO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN SISTEMAS MECÁNICOS

Existen tres componentes pasivos

a) MASA

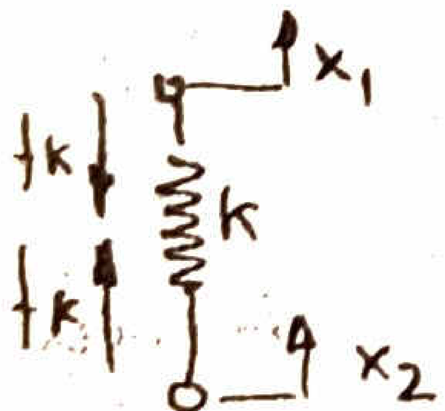


Tenemos un componente pasivo que es la masa y le aplicamos una fuerza lo cual le provoca un desplazamiento.

$m\,D^2y = f(t)$

$m\,Dv = f(t)$

b) RESORTE



Cada extremo del resorte se puede mover una distancia distinta; x_1 y x_2

luego si estiramos los dos extremos aparece una fuerza de reacción $f_k = k(x_1 - x_2)$

Si los desplazamientos son iguales el resorte no produce fuerza.

Si cambiamos el sentido del desplazamiento de un extremo tendremos:

$f_k = k(x_1 + x_2)$

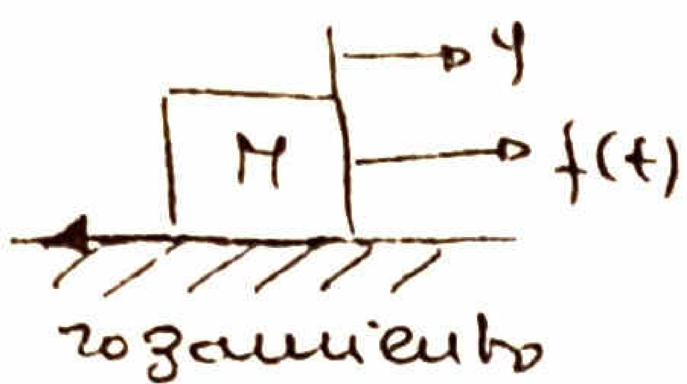
Del primer caso teníamos que:

$f_k = k(x_1 - x_2) = \frac{k}{D}D(x_1 - x_2) = \frac{k}{D}(v_1 - v_2)$

c) ROZAMIENTO



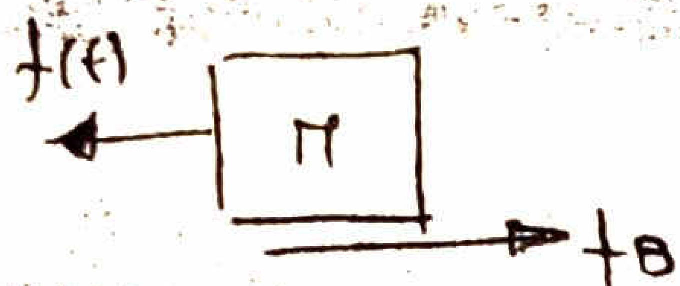
Simbólicamente se representa como un condensador



El extremo superior va con la masa y el inferior con el piso.

$f_B = B(v_1 - v_2)$

Los componentes activos son las fuerzas

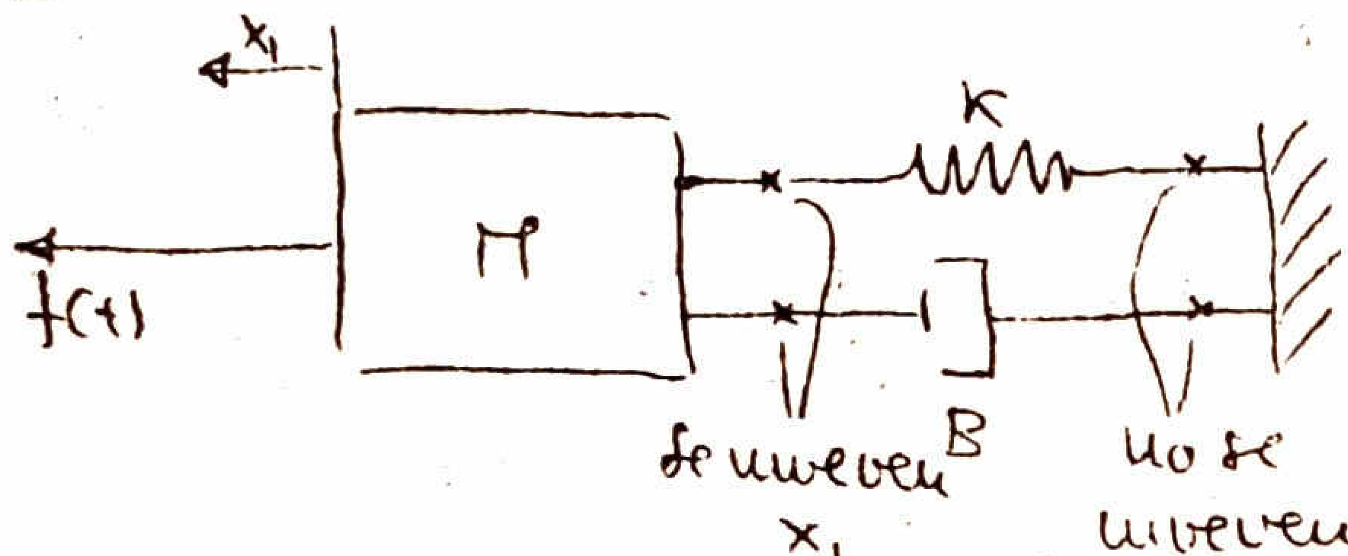


$f_B = B(-v_1 + v_2)$

PROBLEMAS

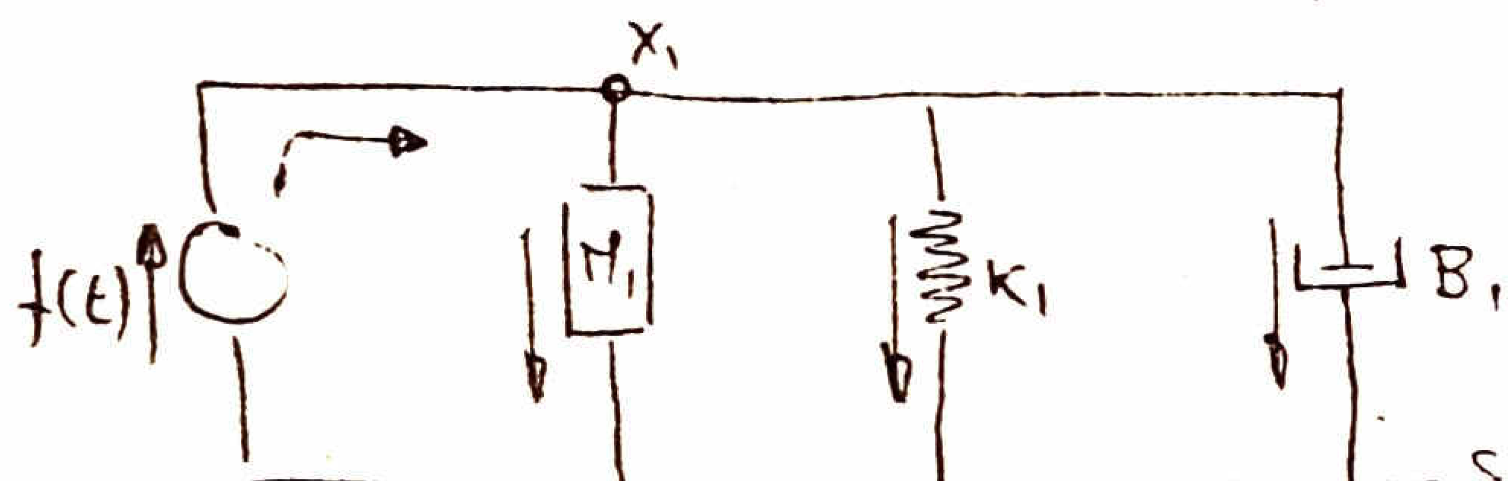
Aplicaciones de lo anterior.

① Establecer las ecuaciones diferenciales del sistema mecánico.



Convertimos este sistema en un circuito mecánico equivalente. Este circuito va a tener varios nudos. Tendrá tantos como desplazamientos existan en el sistema.

En este circuito habrá dos nudos



la fuerza exterior aplicada ha de compensar la fuerza de inercia de la masa, la del resorte y la del rozamiento.

La masa se coloca siempre entre x_1 (nudo correspondiente a su desplazamiento) y el sistema de referencia.

La fuerza la colocamos entre el nudo x_1 y el sistema de referencia que es desde donde se hace la fuerza.

La suma de las fuerzas en cualquier nudo ha de valer 0

Se nos pide hallar el desplazamiento x_1

$$f = MD^2x_1 + k_1(x_1 - 0) + B_1D(x_1 - 0) = (MD^2 + B_1D + k_1)\,x_1$$

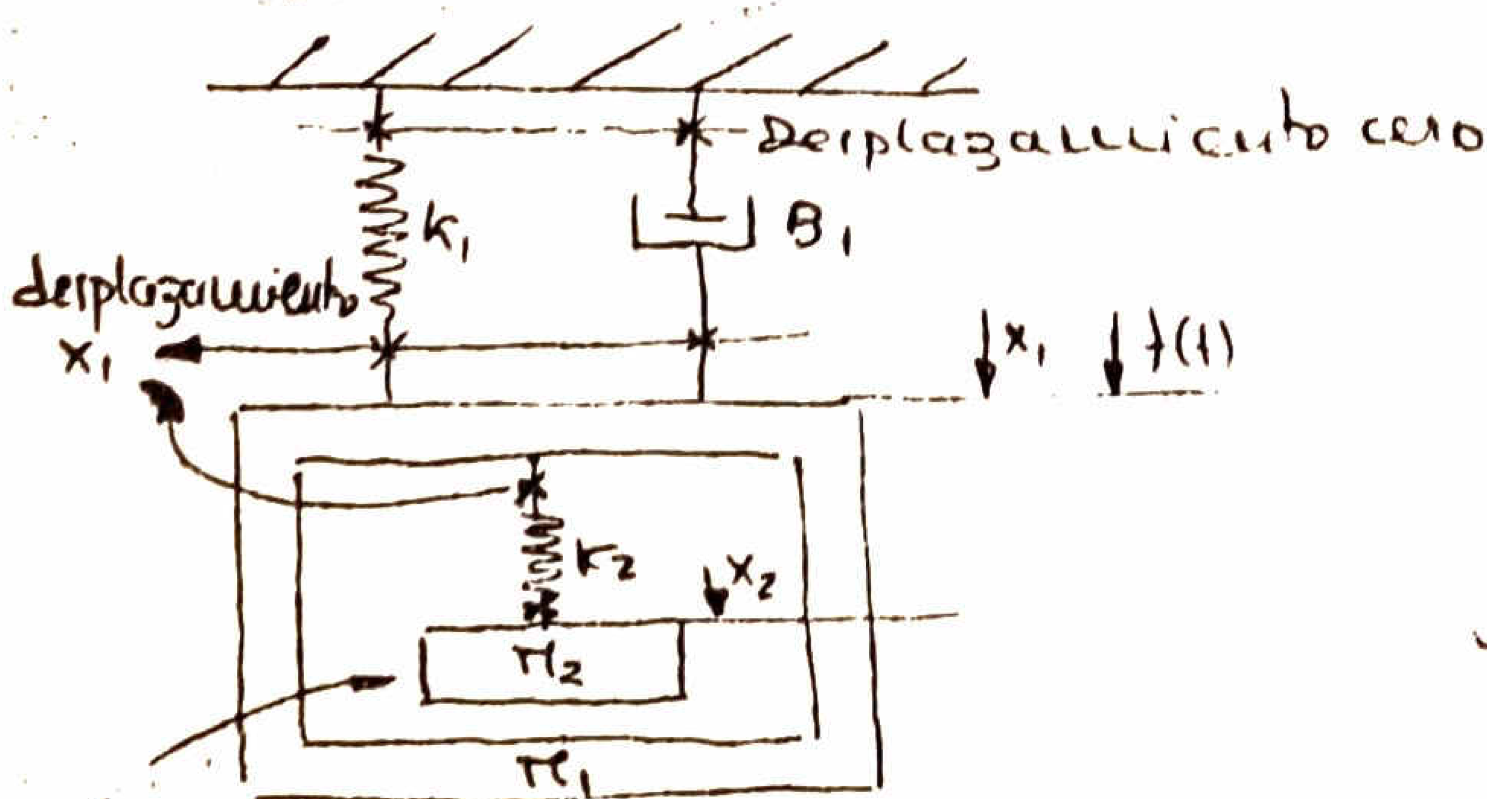
0 ya que el sistema de referencia es 0

Si nos lo piden en función de la velocidad multiplicamos y dividimos por D

$$f = \left(MD + B_1 + \frac{K_1}{D}\right) Dx_1 \quad Dx_1 \to v_1$$

---

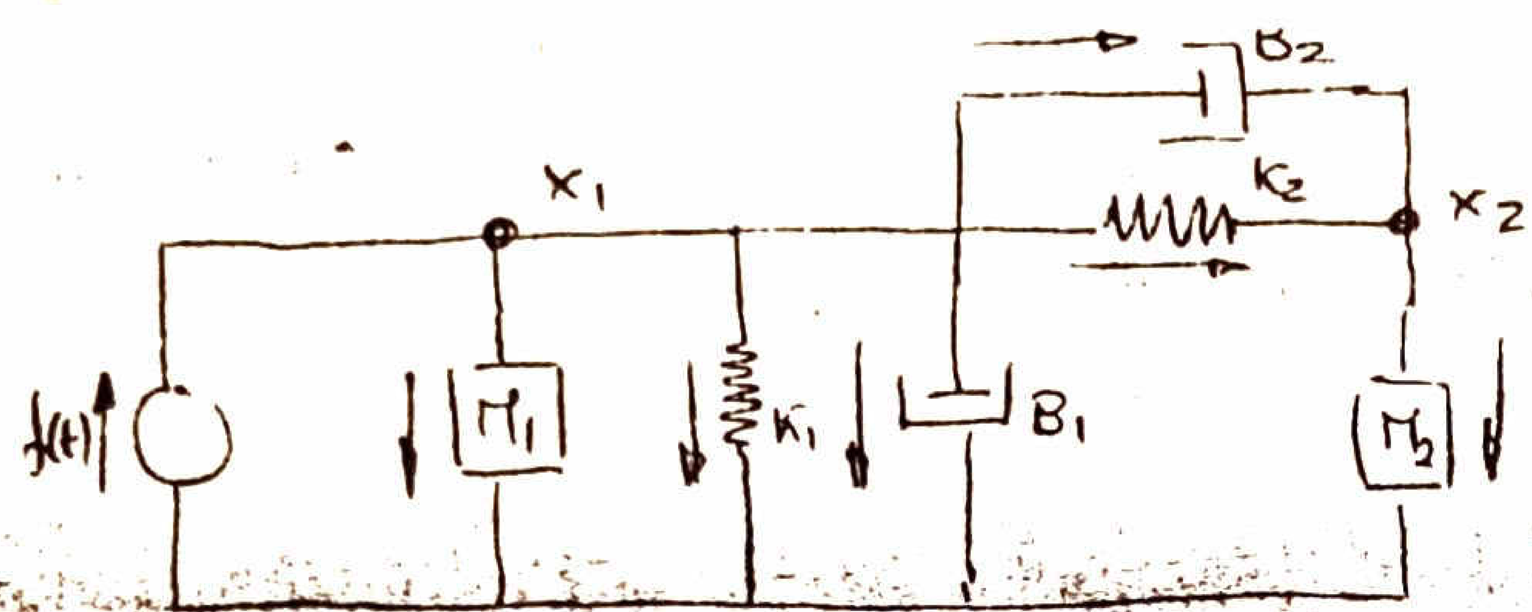
② Hallar las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema mecánico



f(t) es la fuerza que aplicamos.

El desplazamiento x_1 no tiene por qué ser igual al x_2

El sistema equivalente estará formado por tres nudos: dos correspondientes a los desplazamientos x_1 y x_2 y otro será el de referencia.



El resorte K_2 lo ponemos entre x_1 y x_2 ya que un extremo se mueve x_1 y otro x_2

En cada nudo se verificará que suma de fuerzas es igual a cero.

(I) $f = M_1 D^2 x_1 + K_1 x_1 + B_1 D x_1 + K_2 (x_1 - x_2) + B_2 D (x_1 - x_2)$

(II) $M_2 D^2 x_2 = K_2 (x_1 - x_2) + B_2 D (x_1 - x_2)$

En I agrupamos los términos en x_1 y x_2

$f = [M_1 D^2 + (B_1 + B_2) D + (K_1 + K_2)] x_1 - (B_2 D + K_2) x_2$

En II hacemos lo mismo

$0 = -(B_2 D + K_2) x_1 + (M_2 D^2 + B_2 D + K_2) x_2$

como vemos queda igual que un circuito eléctrico estudiado por nudos.

Si nos piden las velocidades en cada nudo dividimos dentro del paréntesis por D y multiplicamos x_1 y x_2 por D.

$f(t) = [M_1 D + (B_1 + B_2) + \frac{K_1 + K_2}{D}] v_1 - (B_2 + \frac{K_2}{D}) v_2$

$0 = -(B_2 + \frac{K_2}{D}) v_1 + (M_2 D + B_2 + \frac{K_2}{D}) v_2$

CIRCUITOS ELECTRICOS

Vamos a construir un circuito eléctrico análogo al sistema mecánico que hemos visto.

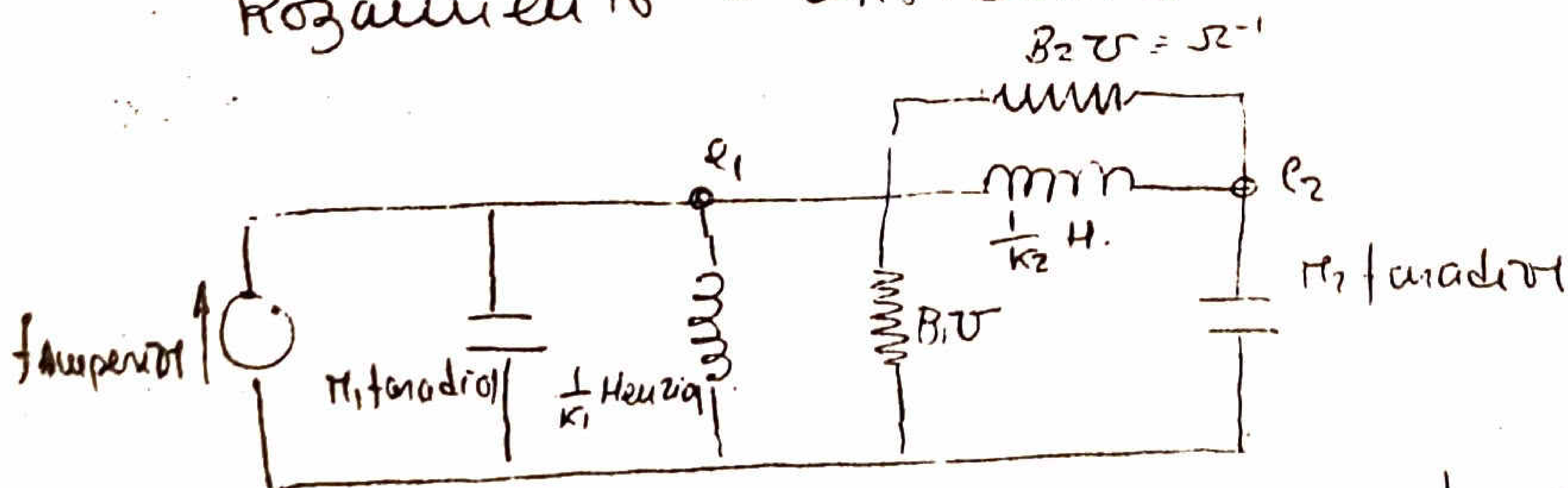
En este sistema en vez de un generador de fuerzas será un generador de corrientes, análogas a las fuerzas y en vez de velocidades en los nudos tendremos tensiones.

Analogía entre los elementos mecánicos y los eléctricos.

Masa → condensador $i = CDe$

Resorte → bobina $i = \frac{1}{LD} e$

Rozamiento → resistencia $i = Ge$



Las ecuaciones de nudos de este circuito serán:

$f = [M_1 D + \frac{K_1}{D} + B_1 + \frac{K_2}{D} + B_2] e_1 - [B_2 + \frac{K_2}{D}] e_2$

$0 = -[B_2 + \frac{K_2}{D}] e_1 + [M_2 D + B_2 + \frac{K_2}{D}] e_2$

como vemos las ecuaciones eléctricas son las mismas que las mecánicas.

- Circuito eléctrico dual al anterior

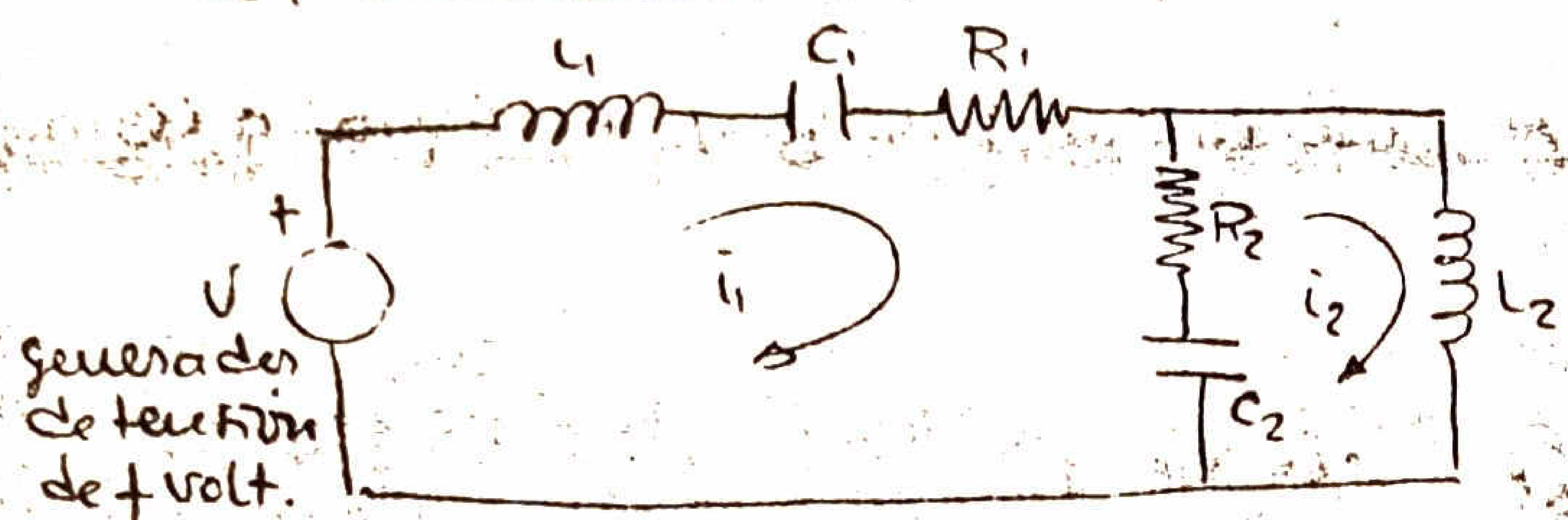
Si tenemos dos nudos tendremos dos mallas.

Las admitancias en paralelo en el nudo 1 pasan a impedancias en serie sobre la malla 1. Un condensador pasa a bobina. una bobina pasa a condensador y una conductancia pasa

... sistema

- En vez de tensiones tendremos corrientes y en vez de generadores de corriente tendremos uno de tensión.

Los elementos en paralelo pasan en serie y viceversa



$$U = \left(L_1 D + \frac{1}{C_1 D} + R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right) i_1 - \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right) i_2$$

$$0 = -\left(R_2 + \frac{1}{C_2 D}\right) i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{C_2 D} + L_2 D\right) i_2$$

Para que estas ecuaciones sean iguales a las que hemos sacado en el sistema mecánico inicial se ha de cumplir:

generador de tensión = f voltios

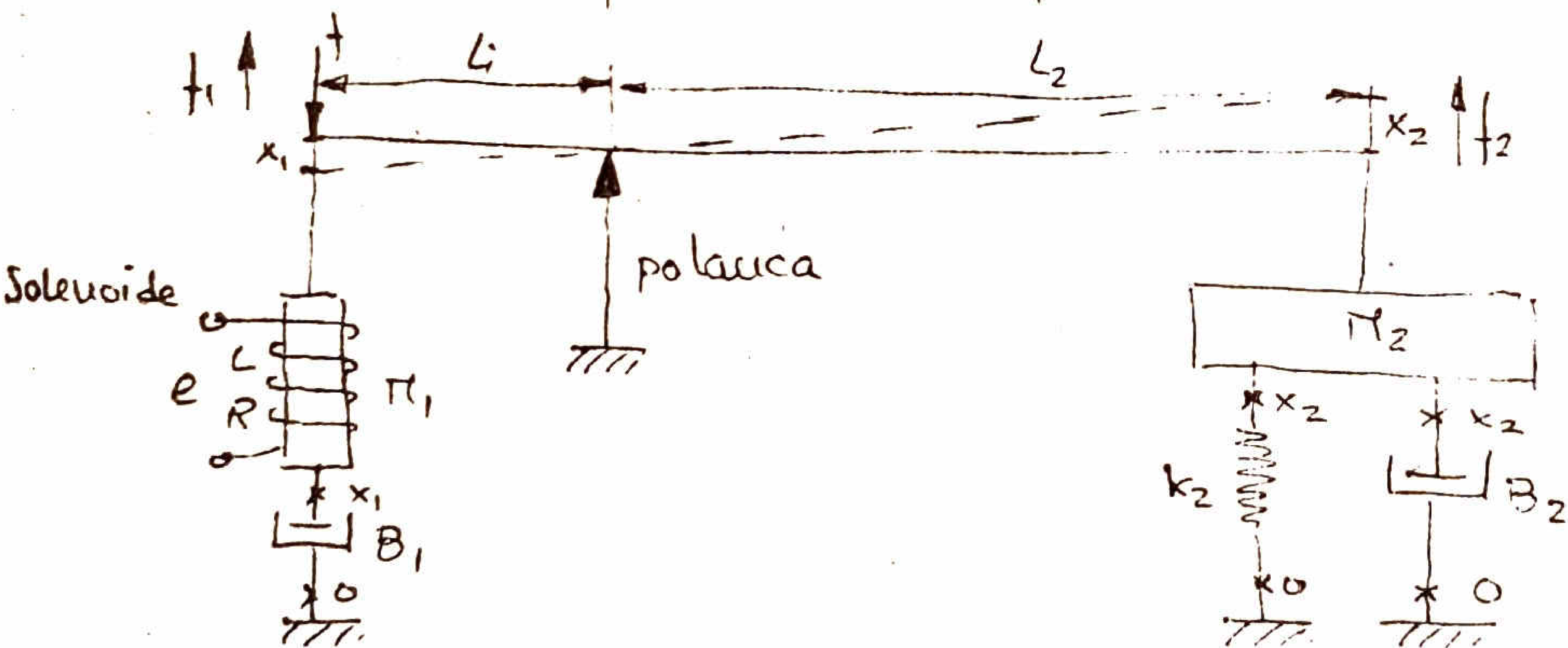
$L_1 = M_1$ Henrios $\qquad R_1 = B_1\, \Omega$

$C_1 = \frac{1}{K_1}$ Faradios $\qquad R_2 = B_2\, \Omega$

$C_2 = \frac{1}{K_2}$ F.

EJEMPLO (TRANSFORMADOR IDEAL)

Un transformador aparece cuando tengamos una palanca. Si movemos el brazo izquierdo una distancia hacia abajo x_1 el otro brazo se desplazará una distancia x_2 hacia arriba. El problema consiste en hallar los desplazamientos.

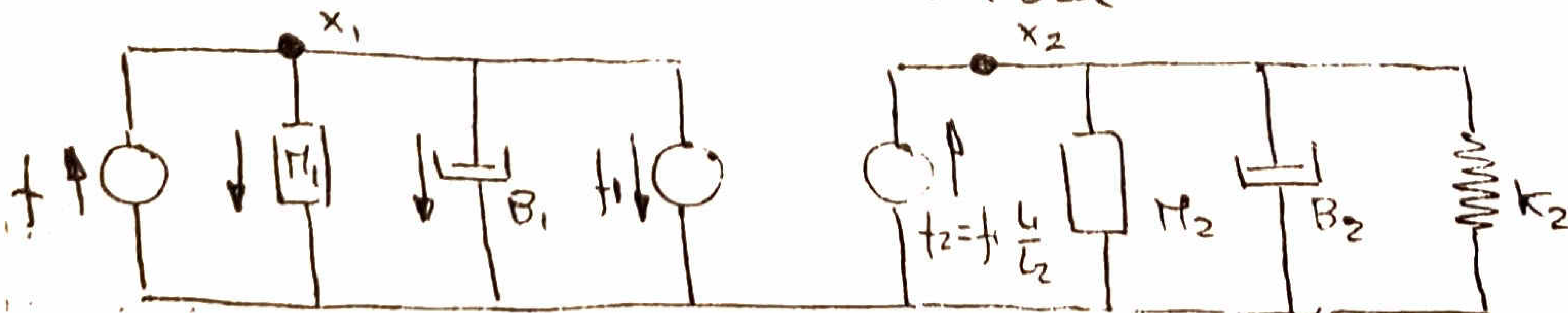


La fuerza que actúa sobre la parte móvil del solenoide:

$$f = K_t\, i = K_t \frac{e}{R + LD}$$

Hay tres puntos de desplazamiento: x_1, x_2 y cero que es el del sistema de referencia.

La fuerza f que actúa tiene que contrarrestar las fuerzas de reacción de la masa M_1 y la de B_1; además ~~además~~ de esta tiene que vencer la fuerza de reacción f_1 del otro lado de la palanca (es decir M_2, K_2, B_2) que se produce al moverse este lado hacia arriba



Nos pedirán x_1 y x_2

$f = (M_1 D^2 + B_1 D)x_1 + f_1$
$f_2 = (M_2 D^2 + B_2 D + K_2)x_2$
$\frac{x_2}{l_2} = \frac{x_1}{l_1}$ $\quad f_2 l_2 = f_1 l_1$

Mediante estas ecuaciones podemos calcular x_1 y x_2

De las tres ecuaciones podemos sacar:

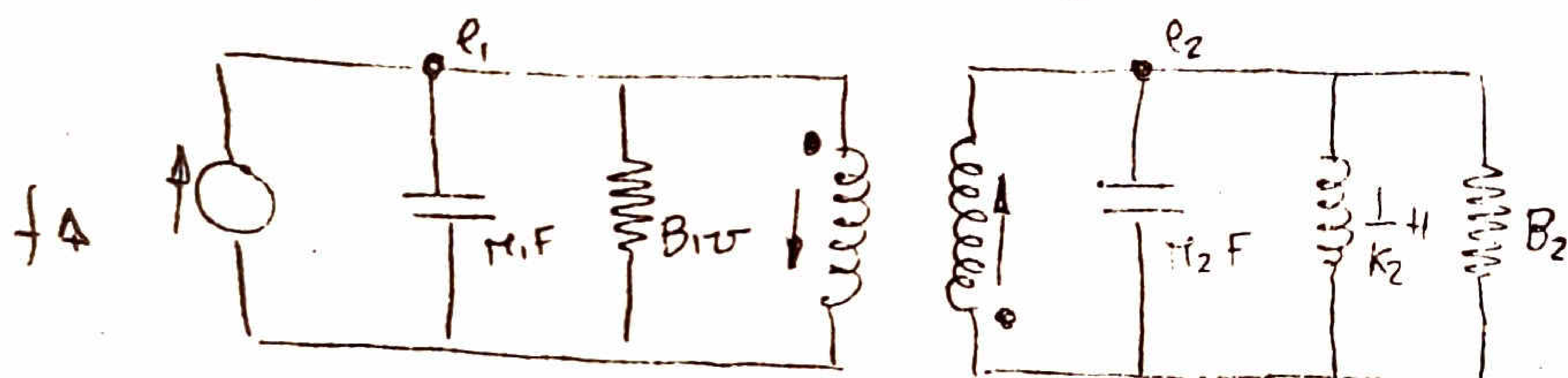
$f(t) = (M_1 D^2 + B_1 D)x_1 + \frac{l_2}{l_1}(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)x_2$
$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2}$

De donde se puede despejar fácilmente x_1 y x_2

Vamos a ver el circuito eléctrico análogo.

masas → condensadores
Rozamientos → conductancias
Resortes → bobinas
Generadores de fuerzas → generadores de corriente
velocidades de nudos → tensiones en nudos
Los dos generadores los sustituimos por un transformador

$e_1 = n e_2$



Se ponen los puntos para que e_1 sea de signo contrario a e_2 ya que los desplazamientos x_1 y x_2 lo eran.

Tendríamos por la ley de la palanca:

$\frac{x_1}{l_1} = \frac{x_2}{l_2}$ Diferenciando $\Rightarrow$ $\frac{Dx_1}{l_1} = \frac{Dx_2}{l_2} \Rightarrow \frac{e_1}{l_1} = \frac{e_2}{l_2} \Rightarrow e_1 = \frac{l_1}{l_2} e_2$

luego la relación de transformación tiene que ser $n = \frac{l_1}{l_2}$
ya que $e_1 = n e_2$

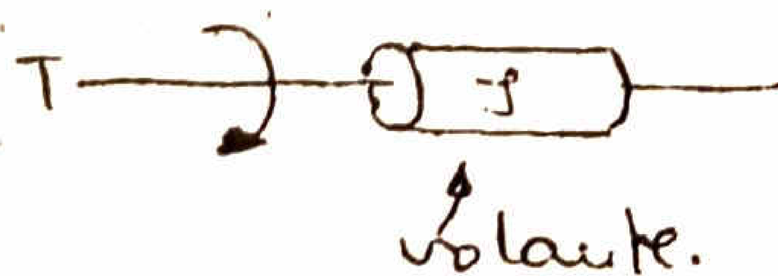
las corrientes que circulan por el primario y el secundario deben seguir cumpliendo la relación de las fuerzas en el circuito mecánico.

siendo el transformador ideal

$n_1 I_1 = n_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{n_1}{n_2} I_1 = \frac{l_1}{l_2} I_2$ luego vemos que se cumple

SISTEMAS MECANICOS DE ROTACION

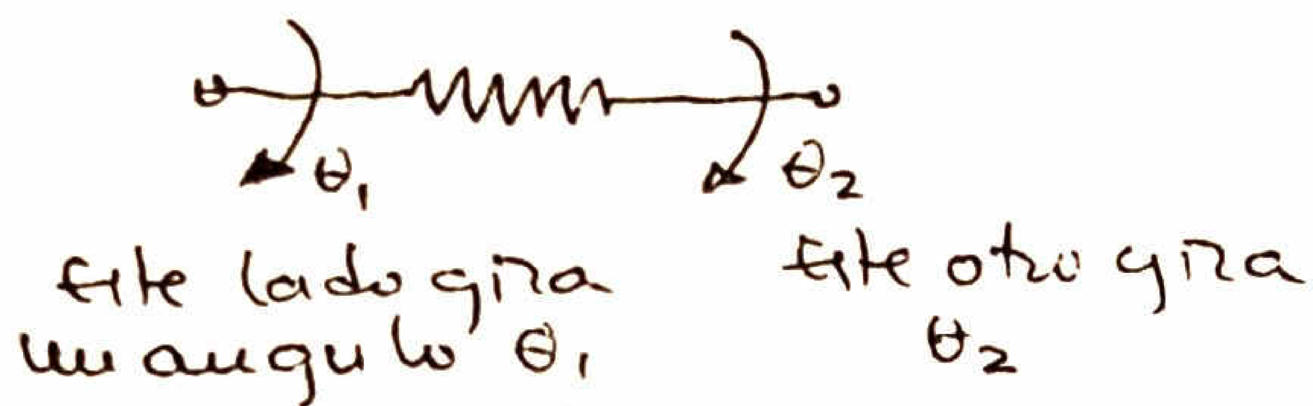
Aquí se sustituye la masa por su momento de inercia
$J = Mr^2$ → momento de inercia (masa uniforme)
Al aplicar un par de fuerzas a la masa obtenemos una ecuación.



El par aplicado a un cuerpo con un momento de inercia J produce una aceleración angular. El par resistente T es igual al producto del momento de inercia y la aceleración angular.

$T = J D^2 \theta = J D \omega = J \alpha$

Uno componente es el resorte que ahora trabaja a torsión.

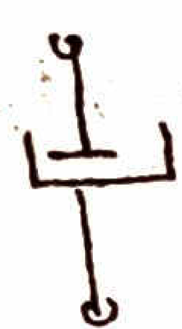


$T = K(\theta_1 - \theta_2) = \frac{K}{D}(\omega_1 - \omega_2)$

par resistente de un resorte Tr al que se le aplica un par

velocidad de giro de los extremos

En el caso del rozamiento:

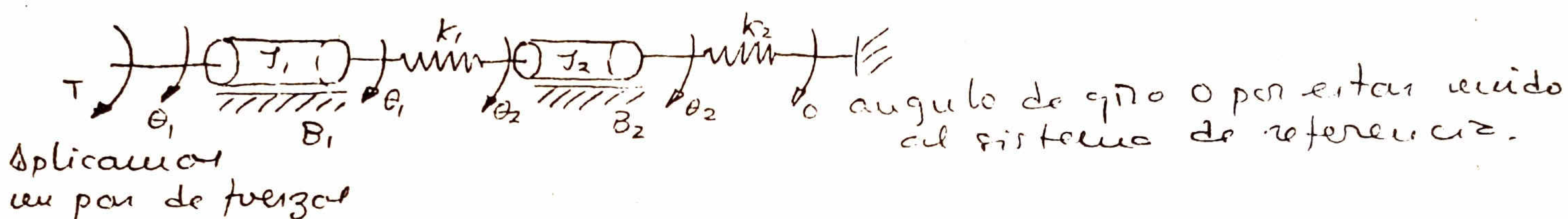


$T = BD(\theta_1 - \theta_2) = B(\omega_1 - \omega_2)$

radianes

par de rozamiento (par amortiguador)

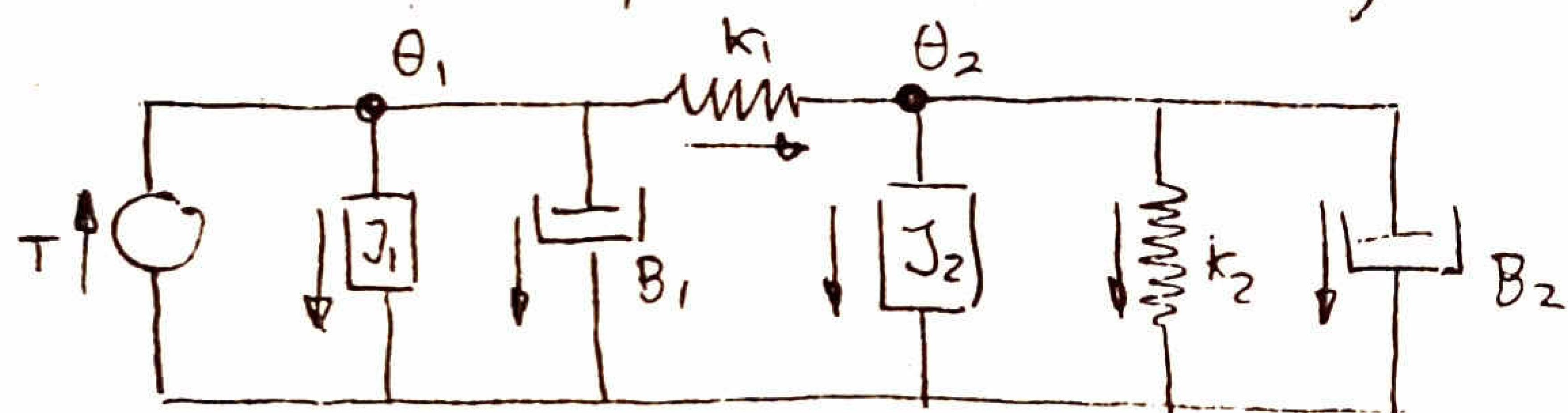
EJEMPLO



angulo de giro 0 por estar unido al sistema de referencia.

Aplicamos un par de fuerzas

Establecemos el circuito mecanico equivalente que estará constituido por dos nudos y un sistema de referencia.



Ecuación del nudo 1 $T = (J_1D^2 + B_1D + K_1)\theta_1 - K_1\theta_2$

" " " 2 $0 = -K_1\theta_1 + (J_2D^2 + B_2D + K_1 + K_2)\theta_2$

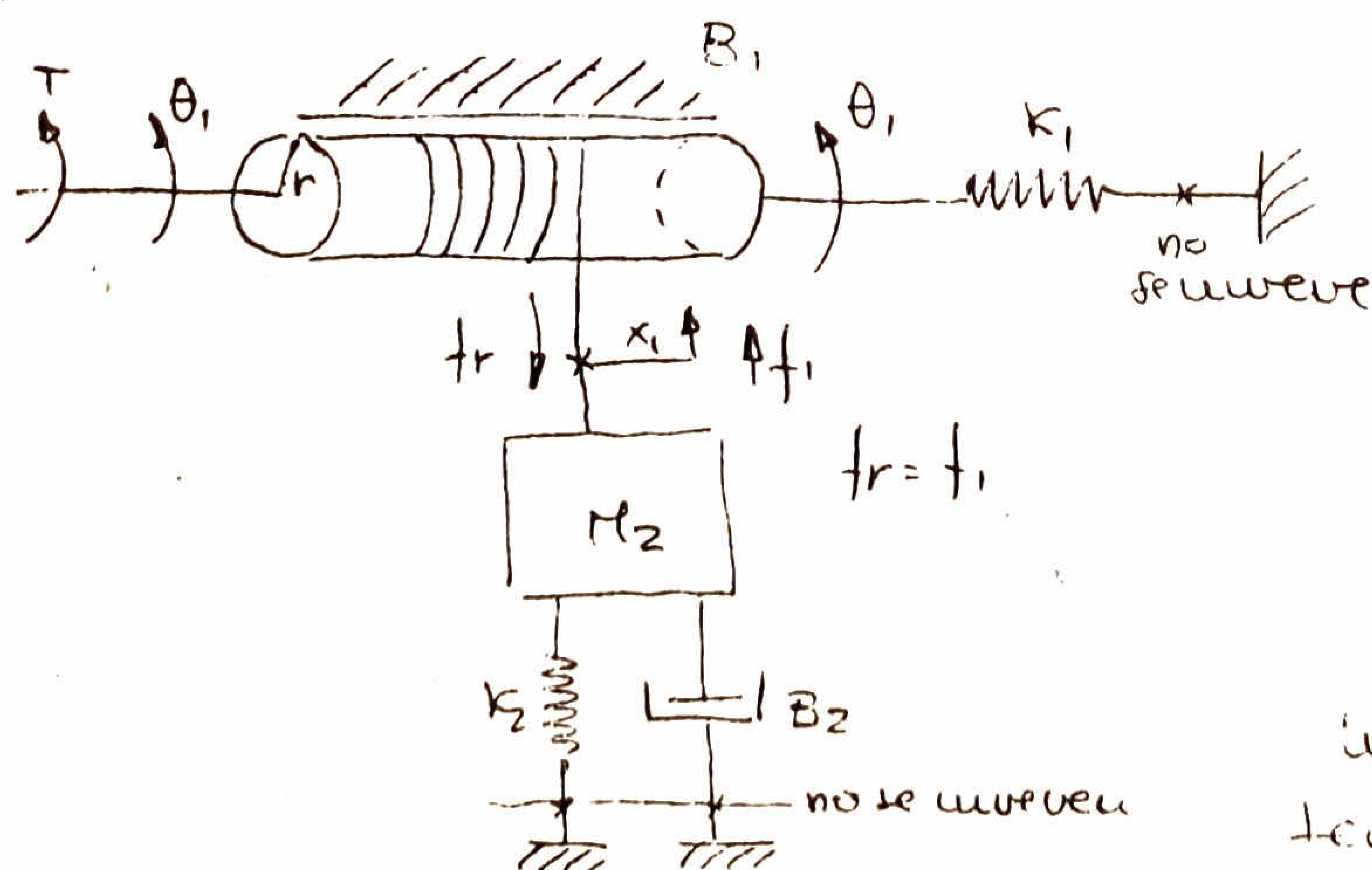
Para pasar al circuito eléctrico análogo.

J → condensador

B → conductancia

K → bobina.

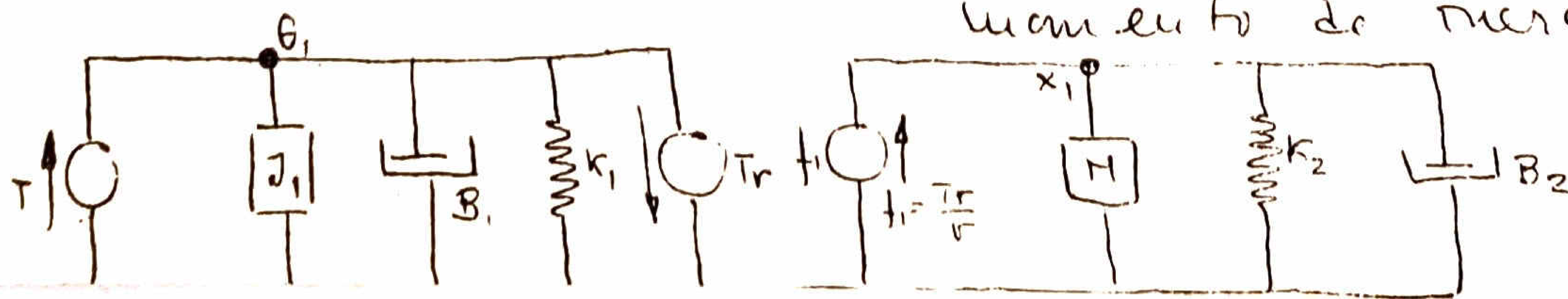
PROBLEMA (con elementos mecanicos de rotación y traslación).



Vemos los desplazamientos ya sean angulares o longitudinales y pasamos a establecer el circuito mecánico equivalente.

fr = fuerza de reacción del sistema formado por M_2, K_2 y B_2

luego el momento aplicado T tendrá que vencer el momento de inercia de J_1 y K_1 y tambien el momento de inercia de la f de reacción fr



la suma de los momentos en cada nudo es 0

$T = (J_1 D^2 + B_1 D + K)\theta_1 + T_r$; $x = r\theta_1$

$f = (M_2 D^2 + B_2 D + K_2)x$; $T_r = f r$

$T = (J_1 D^2 + B_1 D + K_1)\theta_1 + r(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)x$

$T = (J_1 D^2 + B_1 D + K_1)\theta_1 + r^2(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)\theta$

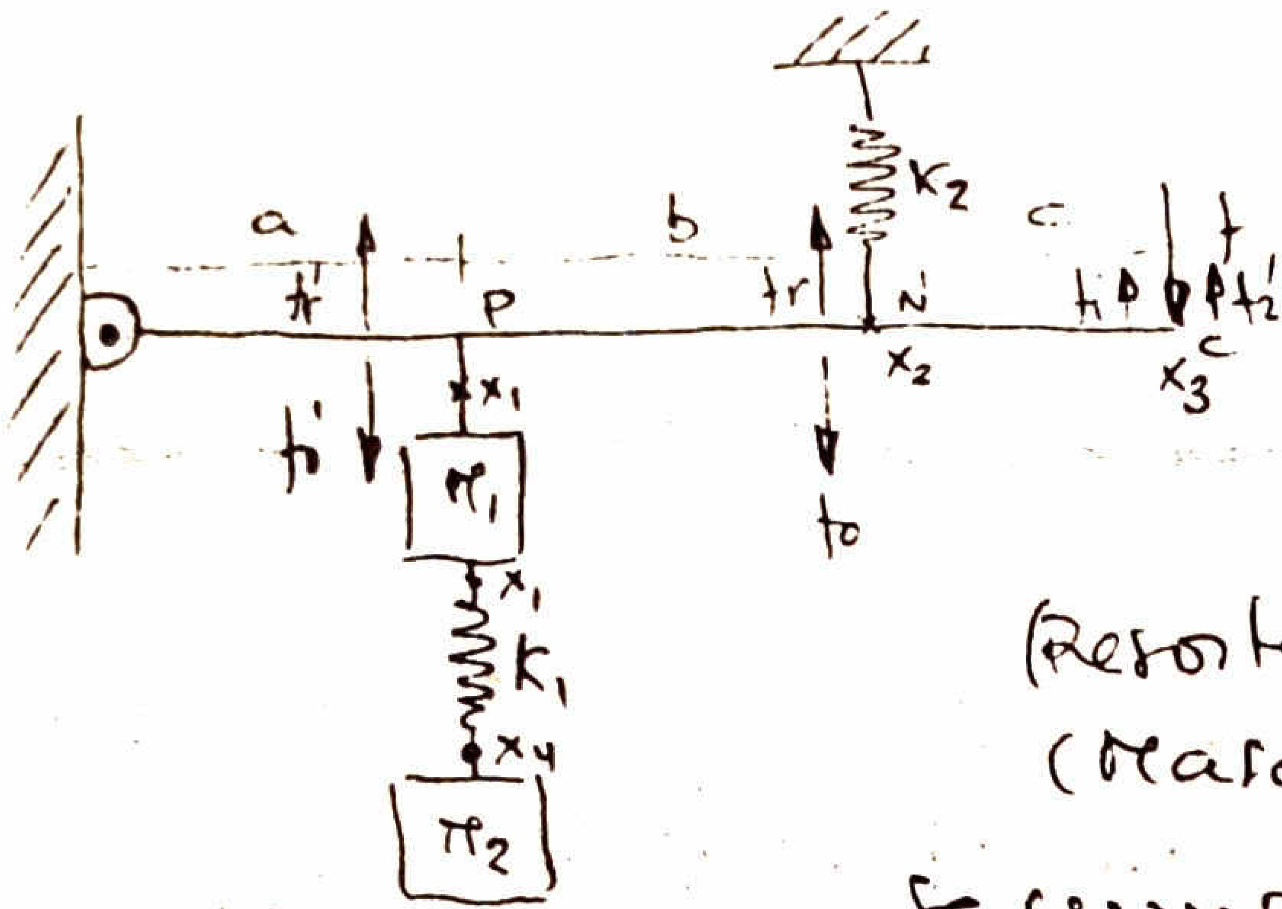
Circuito eléctrico análogo

Transformador : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{s}{\mu}$ $\qquad \frac{T_r}{f} = r \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = r$

$\frac{e_1}{e_2} = \mu$ $\qquad \frac{T_r}{f} = r \Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = \frac{s}{r}$

La relación de espiras es.

PROBLEMA:



Al aplicar la fuerza f aparecen dos fuerzas de reacción, una la del resorte (f_r) y otra debida a las fuerzas de inercia de las masas (f'_r) (M_1 y M_2 y del resorte)

(Resorte) → $f_1 = f_r$ trasladada al punto c

(Masas) → $f'_2 = f'_r$ " " c.

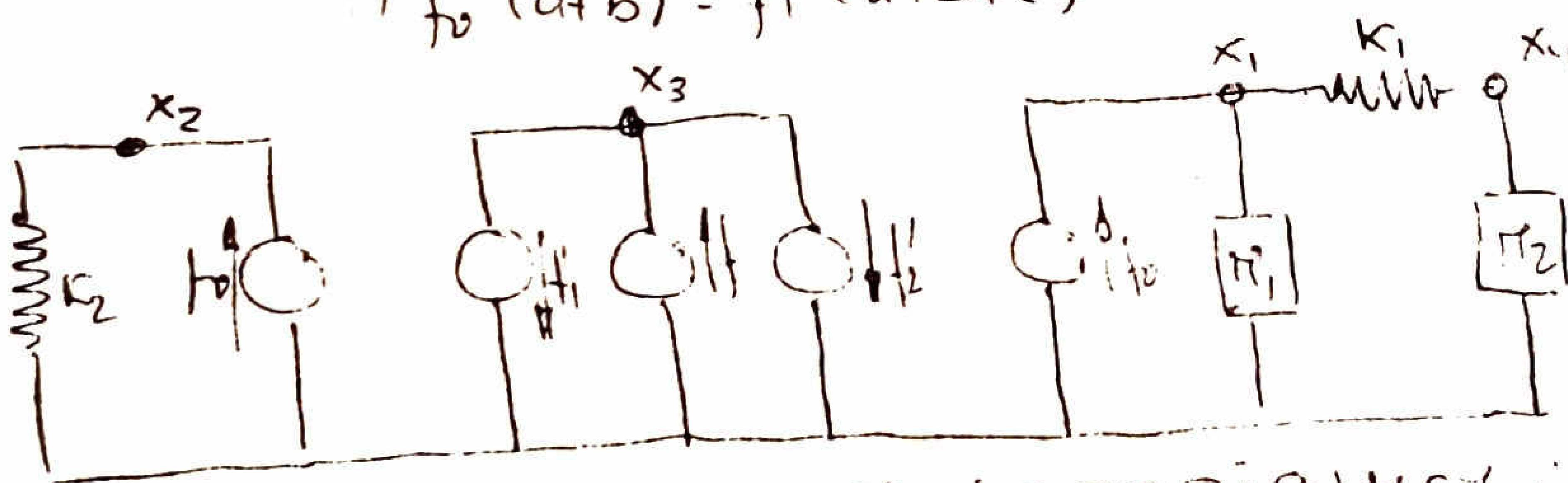
Se cumplirá que f'_1 por su brazo será igual a la f'_0 por el suyo, igual ocurrirá con f_r y f_0

En todos los puntos la suma de las fuerzas ha de ser cero. En el punto c ya tenemos el equilibrio de fuerzas. En el punto N aparecerá una fuerza f_0 hacia abajo para que la suma de fuerzas sea cero.

En P también aparecerá una fuerza f'_0 que tenderá a equilibrarse con la f'_r, esa fuerza f'_0 será debida a M_1 K_1 y M_2

Vamos a construir el sistema mecánico.

(1) $\begin{cases} f'_0 a = f'_2 (a+b+c) \\ f_0 (a+b) = f'_1 (a+b+c) \end{cases}$ Por momentos.



Las masas siempre se colocarán entre el punto de su desplazamiento y el sistema de referencia de las ecuaciones (1)

De las ecuaciones (1) sacaríamos:

$$\begin{cases} f'_0 a = f'_2 (a+b+c) \rightarrow f'_0 = f'_2 \dfrac{a+b+c}{a} \\ f_0 (a+b) = f'_1 (a+b+c) \\ f = f'_1 + f'_2 \end{cases}$$

Las ecuaciones de nudos son:

$$\begin{cases} f_0 = K_2 x_2 \\ f = f'_1 + f'_2 \\ f'_0 = (M_1 D^2 + K_1) x_1 - K_1 x_4 \\ 0 = (M_2 D^2 + K_1) x_4 - K_1 x_1 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones podemos hallar x_1, x_2, x_3 y x_4 despejando simplemente.

$$\frac{x_2}{a+b} = \frac{x_1}{a} \qquad \frac{x_3}{a+b+c} = \frac{x_1}{a}$$

• Sirve para relacionar sistemas mecánicos con eléctricos

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q}$$

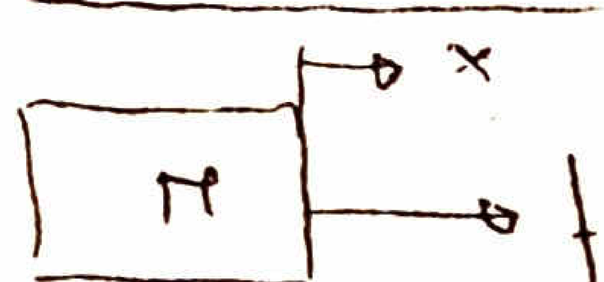
$\frac{dq}{dt} = Dq = \dot{q}$

sin demostrar (a la brava)

T = Energía cinética total del sistema (masa, bobina)
U = Energía potencial (resorte, condensador)
D = Energía de disipación (rozamientos, resistencias)
q = variable del sistema (generalizada). (desplazamiento (x, θ), cargas)
F = fuerza generalizada (fuerza, momento). (tensión)

lo segundo son las equivalencias por mallas.

* Sistema mecánico de traslación.



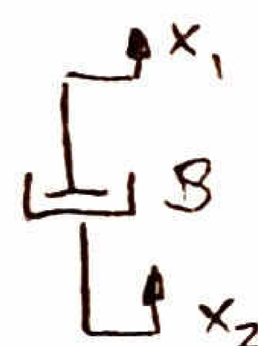
$U = \frac{dx}{dt} = Dx = \dot{x}$

$T = \frac{1}{2} m U^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$



$U = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} k x^2$

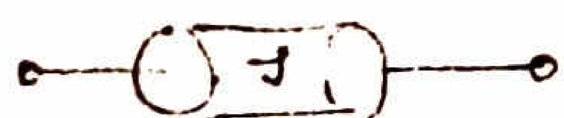
Energía = $\int$ fuerza.



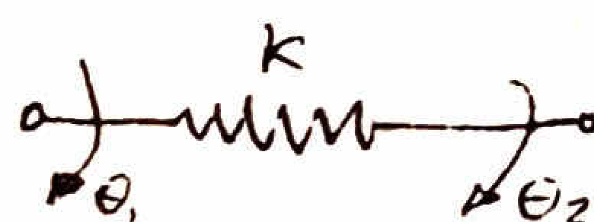
$D = \frac{1}{2} B (U_1 - U_2)^2 = \frac{1}{2} B U^2 = \frac{1}{2} B \dot{x}^2$

* Sistema mecánico de rotación

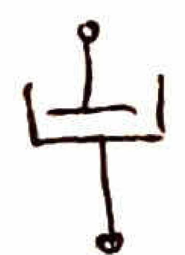
$\omega = \frac{d\theta}{dt} = D\theta = \dot{\theta}$



$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

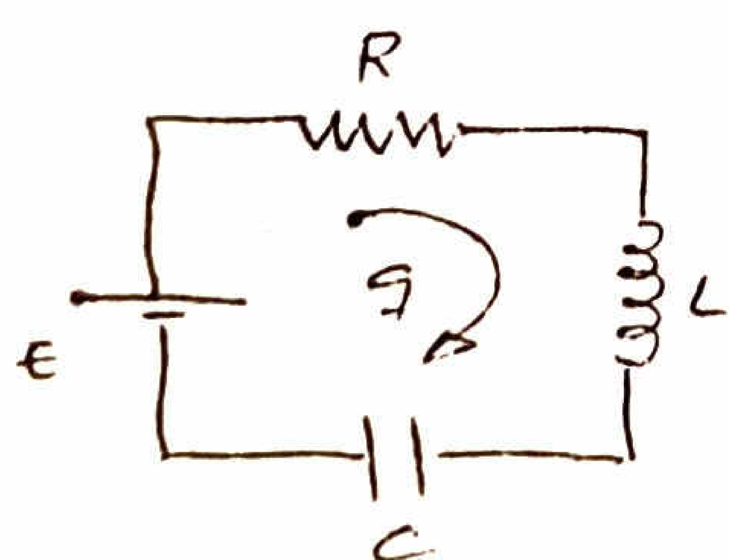


$U = \frac{1}{2} k (\theta_1 - \theta_2)^2 = \frac{1}{2} k \theta^2$



$D = \frac{1}{2} B (\omega_1 - \omega_2)^2 = \frac{1}{2} B \omega^2 = \frac{1}{2} B \dot{\theta}^2$

* Sistema eléctrico



$\frac{dq}{dt} = i$

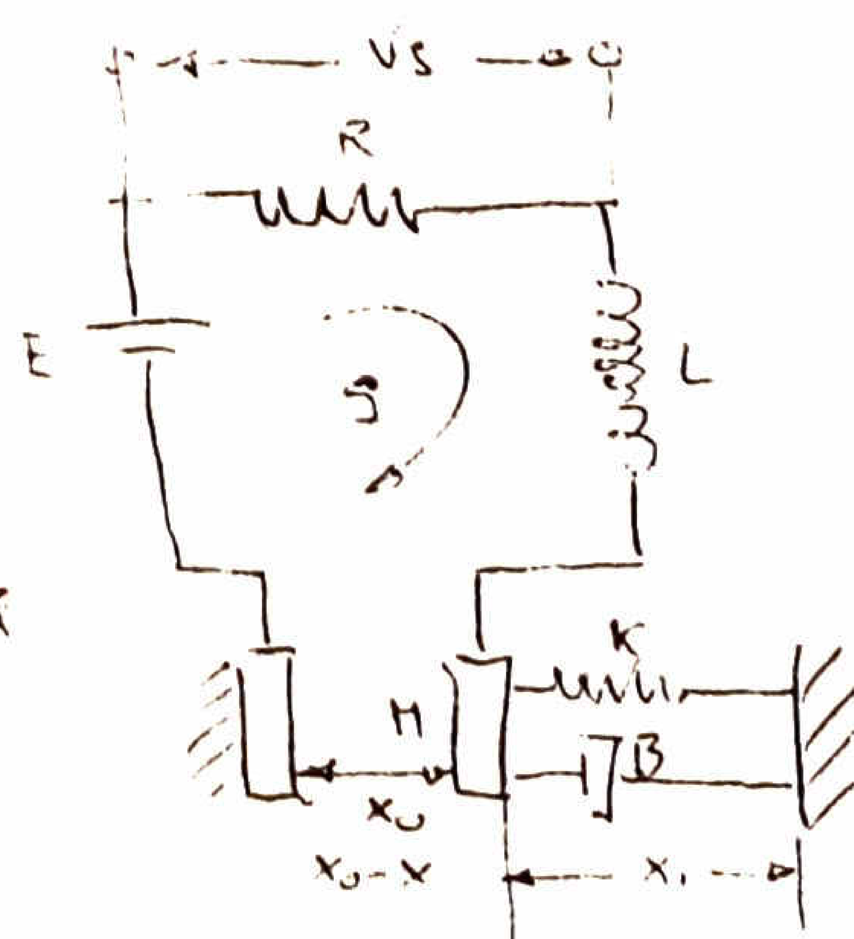
$T = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$

$V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2C} q^2$

$D = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$

APLICACION DE LA ECUACION DE LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = F$$



• la señal de salida se obtiene en bornas de la resistencia.

la fuerza en las placas del condensador es:

$F_c = -\dfrac{dV_c}{dx}$ V_c = energía potencial en bornas del condensador.

$$V_c = \frac{q^2}{C} = \frac{q^2}{2\varepsilon A}x$$

$$\boxed{F_c = -\frac{q^2}{2\varepsilon A}}$$

$E = \dfrac{q_0}{C}$ Inicialmente toda la tensión va aplicada sobre el condensador. Entonces las dos placas tienden a juntarse y no se juntan debido al resorte y al rozamiento.

En el equilibrio la distancia entre las placas es x_0 y esta rán q_0 (carga inicial en el condensador) y x_1 (distancia entre la placa derecha y el punto fijo)

$$E = \frac{q_0}{C} \Rightarrow f = \frac{q_0^2}{2\varepsilon A}$$

Cuando el condensador se va cargando aparece la fuerza f lo que provoca un estiramiento del resorte igual a $x_1 + x$ y la distancia entre las placas disminuye a $x_0 - x$

Esto en cuanto a la parte mecánica; en cuanto a la parte eléctrica. Al disminuir la distancia C aumenta, luego la carga también (no ... la f la aplico yo a parte después lo veo)

Entonces:

$$E = \frac{q_0 + q}{\varepsilon A}(x_0 - x) \qquad C = \frac{\varepsilon A}{x_0 - x}$$

la variable generalizada en el sistema mecánico será el desplazamiento x y en el eléctrico es la carga q

Energías cinéticas $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2$

Energía de disipación $D = \frac{1}{2}B\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2$

Energías Potenciales $V = \frac{1}{2}K(x_1 + x)^2 + \dfrac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon A}(x_0 - x)$

$i = \dfrac{dq}{dt}$

$B\,D\,x_1 = 0$

Aplicamos la ecuación de Lagrange y para hallar las derivadas parciales respecto a las variables debemos tener en cuenta que estas son dos, una es el desplazamiento x y la otra la carga q

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L\,\dot{q} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = M\dot{x}$$

$q = q$ $\qquad$ $q = x$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

son cero porque la energía cinética no depende de la variable generalizada sino de su derivada

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R\dot{q} \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = B\dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{(q_0+q)}{\varepsilon A}(x_0 - x) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = K(x_1 + x) - \frac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon A}$$

Expresión general:

Sistema eléctrico $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{(q_0+q)}{\varepsilon A}(x_0 - x) = E = F$ (fuerza generalizada en el sistema eléctrico)

Sistema mecánico $M\ddot{x} + B\dot{x} + k(x_1+x) - \frac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon A} = f(t)$

Tenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas que son q y x, que son variaciones respecto a las posiciones de equilib. Lo que ocurre es que las ecuaciones no son lineales por lo que vamos a intentar linealizarlas.

$q x$ grado 2 $\quad (q_0+q)(x_0-x) = q_0x_0 - q_0x + q\,q_0 - qx$

Para ello se consideran pequeñas variaciones respecto al punto de equilibrio con lo que se puede despreciar qx

De igual manera

$(q_0+q)^2 = q_0^2 + 2qq_0 + q^2$

Con lo que las ecuaciones diferenciales quedan de la forma:

$$\begin{cases} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q_0x_0}{\varepsilon A} - \frac{q_0 x}{\varepsilon A} + \frac{q x_0}{\varepsilon A} = E \\ M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx_1 + Kx - \frac{q_0^2}{2\varepsilon A} - \frac{qq_0}{\varepsilon A} = f(t) \end{cases}$$

Como en la posición de equilibrio $\frac{q_0x_0}{\varepsilon A} = E$ nos lo cargamos.

Kx_1 fuerza del resorte al estirarse (equilibrio) provocada por la fuerza de atracción entre placas } son iguales, luego nos lo cargamos

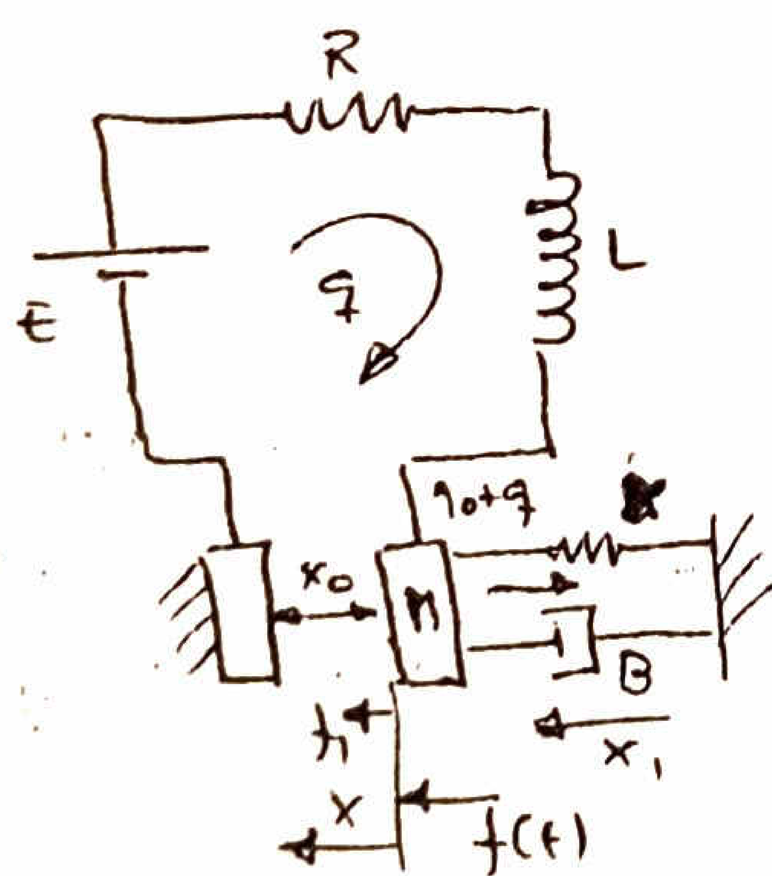
$-\frac{dV}{dx} = \frac{q_0^2}{2\varepsilon A}$ = fuerza de atracción entre placas

Después de esto nos queda:

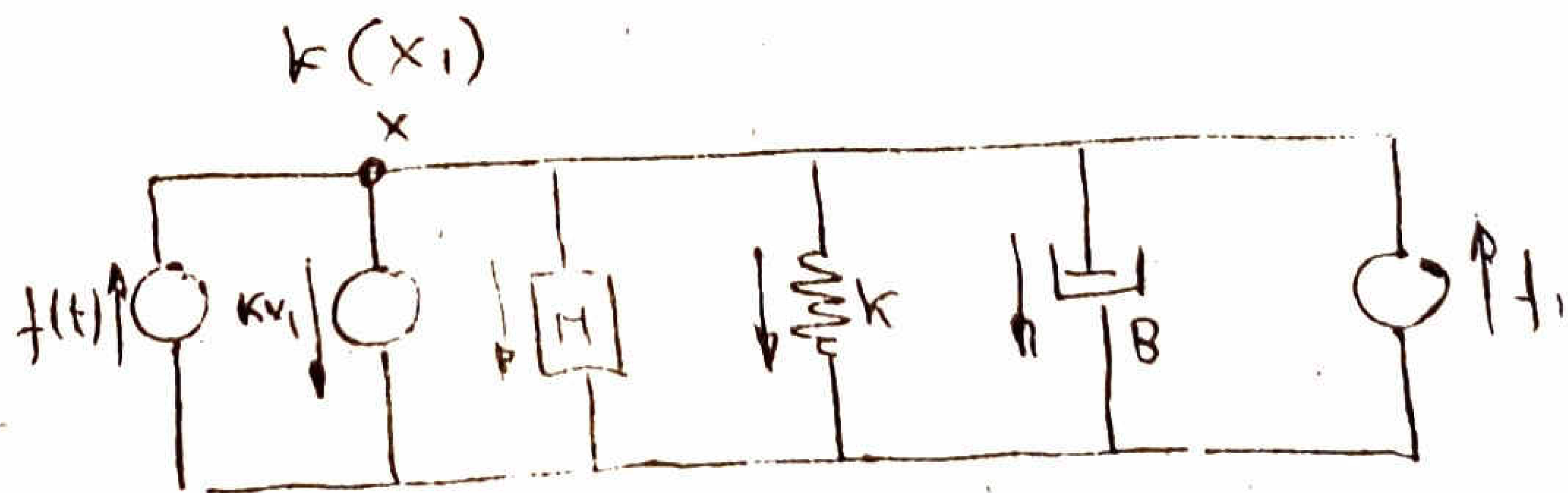
$$\begin{cases} L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{q_0 x}{\varepsilon A} + \frac{q x_0}{\varepsilon A} = 0 \\ M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx - \frac{qq_0}{\varepsilon A} = f(t) \end{cases}$$

Al linealizar las ecuaciones de salida en el intervalo del proceso no puede salir ninguna ecuación no lineal.

Estudio por el método clásico:

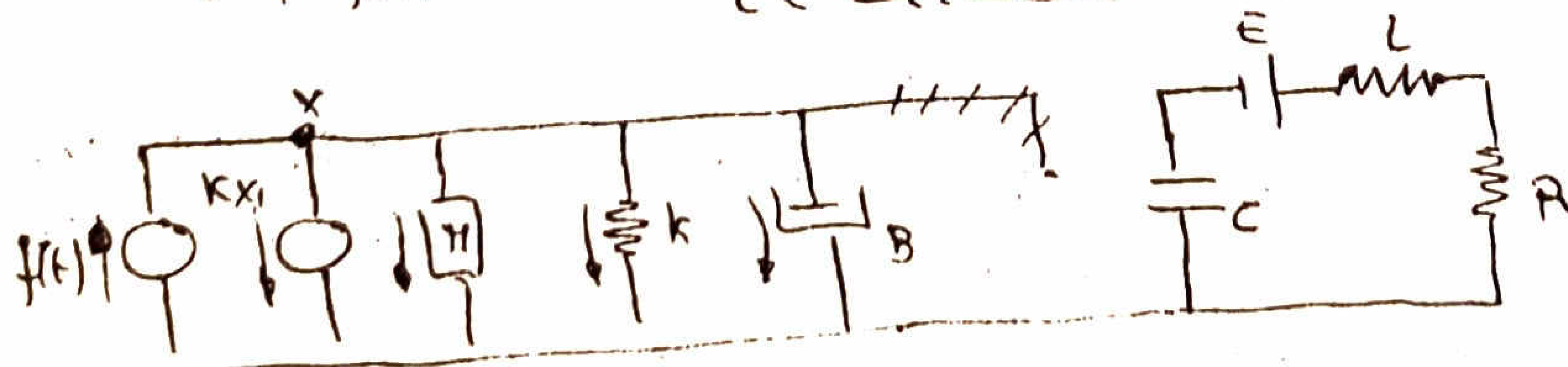


Entre las placas habrá una fuerza de atracción (f₁)
El resorte producirá una fuerza de reacción $k(x_1)$



$f_1 = \frac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon A}$ en todo momento

El circuito también se puede poner como:

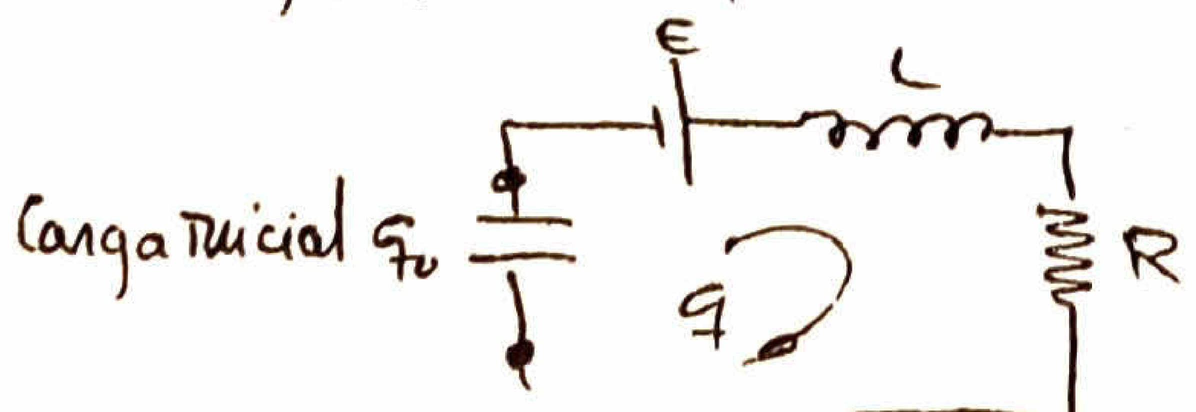


$f_c = \frac{(q_0+q)^2(x_0-x)}{\varepsilon A}$

Las ecuaciones serán:

$f(t) = kx_1 + (MD^2 + BD + K)x - \frac{(q_0+q)^2}{2\varepsilon A}$

Esta ecuación tampoco es lineal luego hay que linealizarla.



$E = \frac{q_0}{C} + \left[\frac{1}{C} + LD^2 + RD\right]q$

La capacidad la tenemos

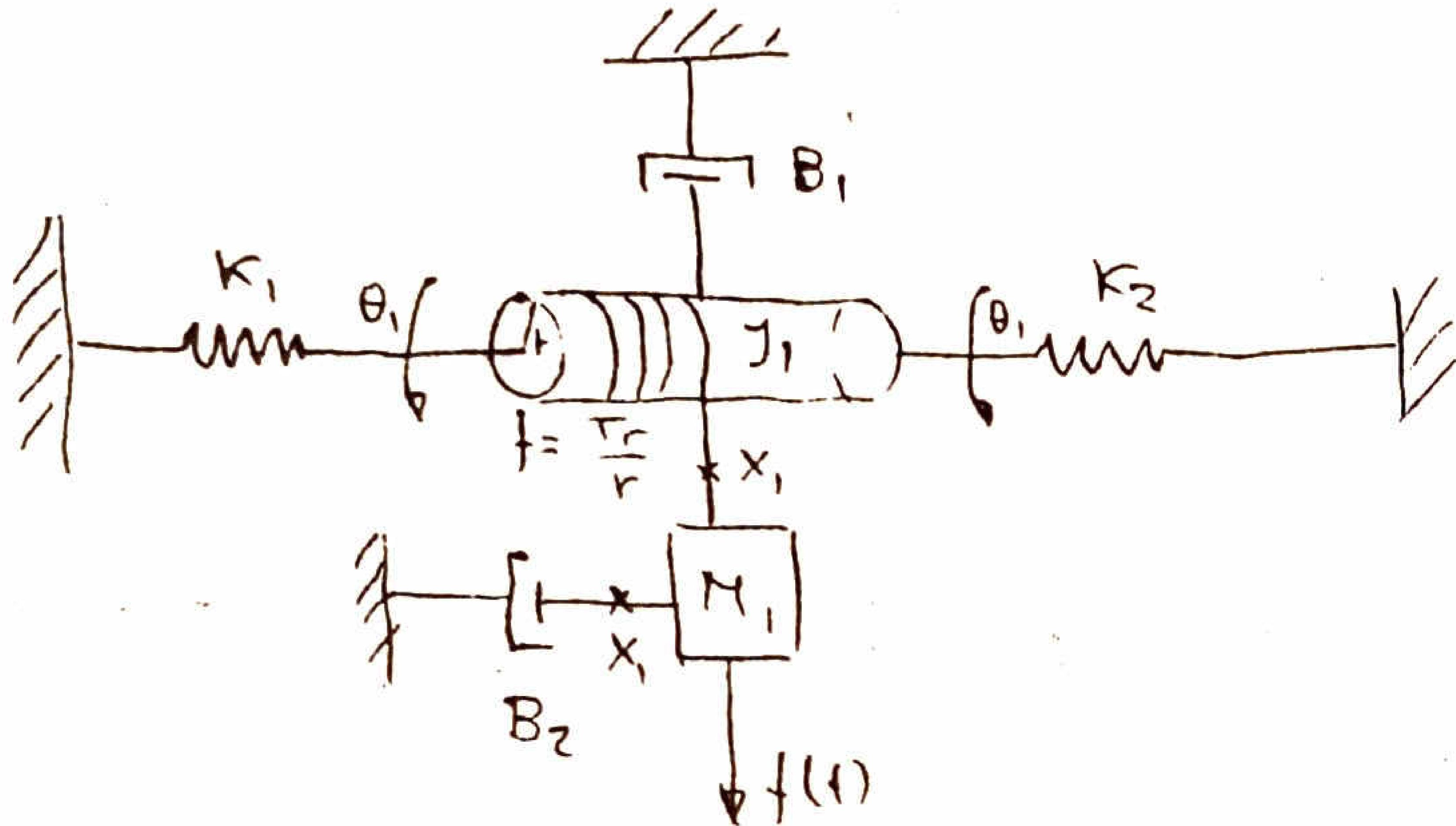
- $C = \frac{\varepsilon A}{x_0 - x}$ Sustituyendo en la ecuación:

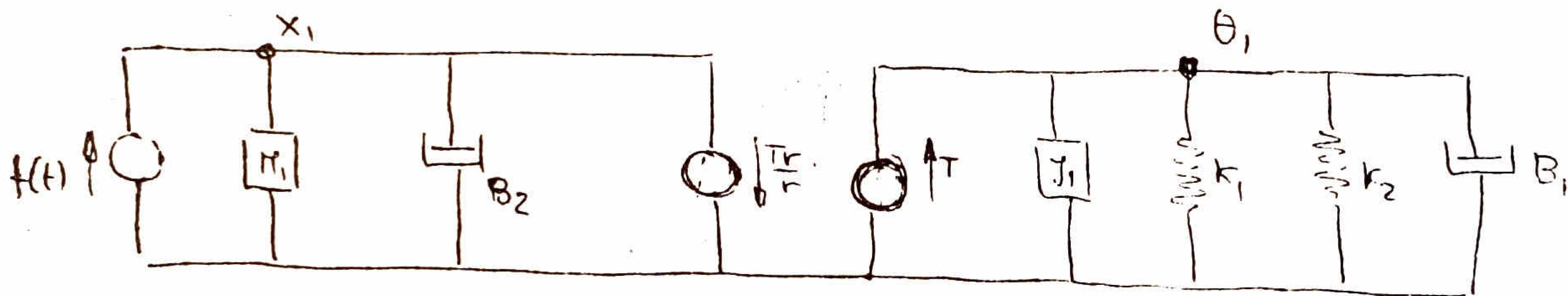
$$E = \frac{q_0 + q}{\varepsilon A}(x_0 - x) + [LD^2 + RD]\,q$$ También hay que linealizarla.

Como vemos estas ecuaciones son las mismas que haciendolo por Lagrange.

PROBLEMAS

Determinar las ecuaciones del circuito (Problema de examen)





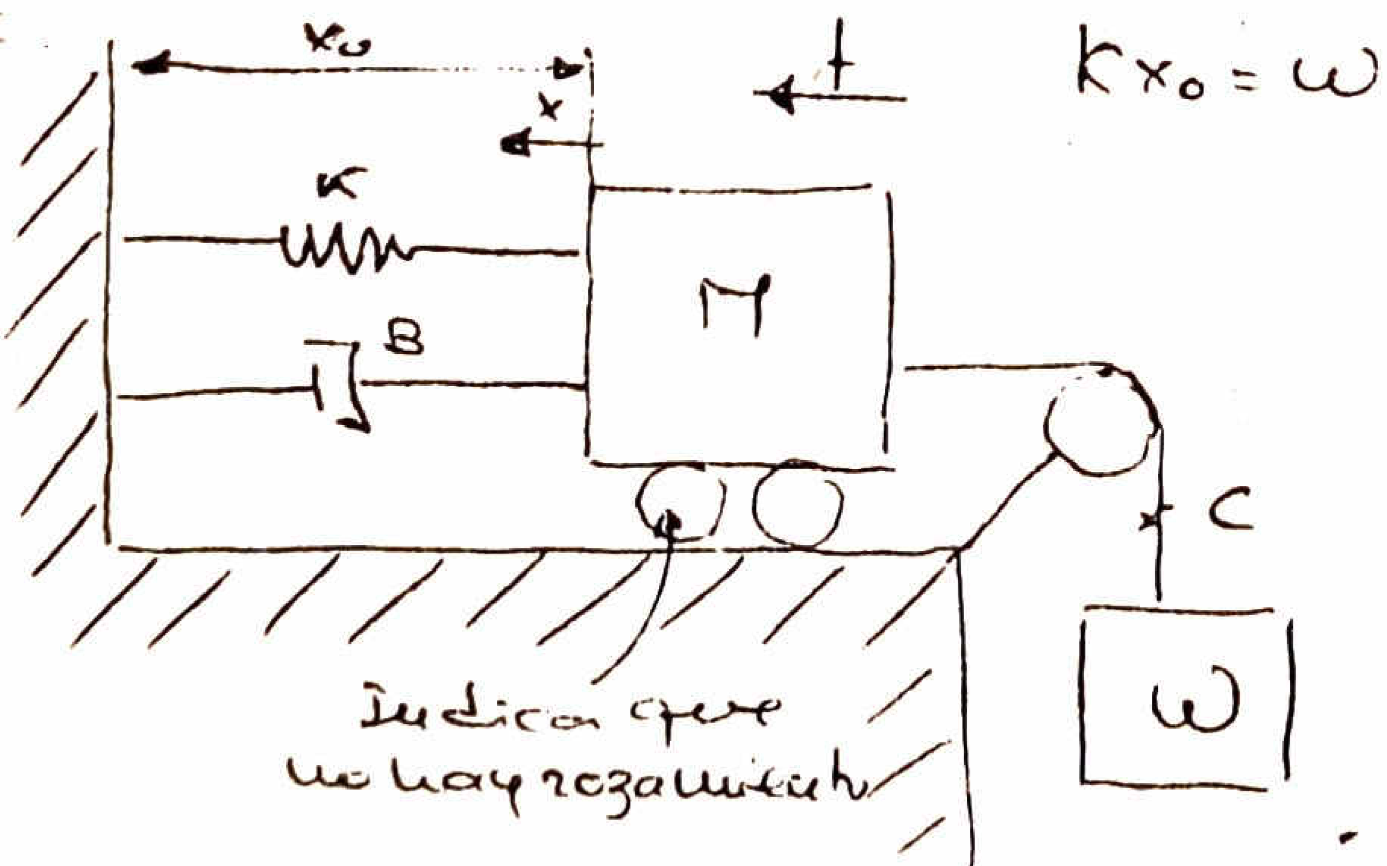
$$f(t) = (M_1D^2 + B_2D]x_1 + \frac{Tr}{r}$$
$$Tr = [J_1D^2 + K_1 + K_2 + B_1D]\,\theta_1$$

$V_1 = r\omega$
$x_1 = r\theta_1$

$$f(t) = [M_1D^2 + B_2D]\,r\theta_1 + [JD^2 + K_1 + K_2 + B_1D]\,\frac{\theta_1}{r}$$

Esta sería la ecuación del sistema

- Determinar las ecuaciones del circuito.



$Kx_0 = W$

En el equilibrio el resorte está estirado x_0 y para estar en equilibrio $Kx_0 = W$. Ahora cortamos la cuerda por el punto C. Entonces la masa M se desplazará un espacio x debido a la fuerza del resorte. Entonces la fuerza del resorte se repartirá en vencer la fuerza de la masa y la del rozamiento.

$$K(x_0 - x) = (MD^2 + BD)\,x$$
$$Kx_0 = (MD^2 + BD + K)\,x$$
$$W = (MD^2 + BD + K)\,x$$

de aquí calcularíamos x

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = f(t)$

$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = 0$ Ecuación diferencial homogénea.

El polinomio tendrá unas raíces:

$[(D-m_1)(D-m_2) \dots (D-m_n)] y = f(t)$

$m_1 = r + jw$, $m_2 = r - jw$ } Siempre que aparezca una raíz imaginaria aparecerá también su conjugada.

La solución de la homogénea saldría de

$[(D-m_1)(D-m_2) \dots (D-m_n)] y = 0$

y sería de la forma

$y_h = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \dots + C_n e^{m_n t}$

Si la raíz fuese doble $(D-m_1)^2$

$(C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t})$

Vamos a ver de que tipo es la $f(t)$ (señales de ingreso) que utilizamos en los distintos sistemas

$f(t)$ {
- exponencial e^{at}
- senoidal $\text{sen}(at+b)$ $\cos(at+b)$
- escalón $A\,\mu_{-1}(t)$ →
- rampa $At + B$ → $\text{tg}\,\alpha = A$
- parabólica $At^2 + B$ → También llamada escalón de aceleración.
- potenciales $f(t) = At^n + B$

Estas señales son las que sirven de excitación a los distintos sistemas.

OBTENCIÓN DE SOLUCIONES PARTICULARES SEGÚN $f(t)$

EXPONENCIALES.

⊛ $(D^2 + 3D + 5) y = e^{2t}$

La solución particular sería

$y_p = \frac{1}{D^2 + 3D + 5} e^{2t}$ Para hallar y_p se sustituye D por el exponente de la función, en este caso $2 = D$

$y_p = \frac{1}{2^2 + 3 \cdot 2 + 5} e^{2t} = \frac{1}{15} e^{2t}$

La solución homogénea saldría de $(D^2 + 3D + 5) = 0$

Hallaríamos las raíces r_1 y r_2 : $y_h = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$

$y = y_h + y_p$

SENOIDALES

⊛ $(D^2 + 5) y = \text{sen}\, 2t$

$y_p = \frac{1}{D^2 + 5} \text{sen}\, 2t = \frac{1}{-(2^2) + 5} \text{sen}\, 2t = \text{sen}\, 2t$

Los D elevados a un número par se sustituyen por:

$D^2 \to -(a^2)$ Siendo a la velocidad angular de la función senoidal, en este caso sería $w = 2$

$D^4 \to [-(a^2)]^2$

$D^6 \to [-(a^2)]^3$;

⊛ $(D^2 + 3D + 5) y = \text{sen}\, 2t$

$y_p = \frac{\ \ }{(D^2+3D+5)}$ ... $\frac{\ \ }{3D+1}$ ... =

los D elevados a un numero impar se dejan iguales

con esto queda una ecuación diferencial de primer orden

$$= \frac{(3D-1)}{(3D+1)(3D-1)} \operatorname{sen} 2t = \frac{3D-1}{9D^2-1} \operatorname{sen} 2t = \frac{3D-1}{-37} \operatorname{sen} 2t = -\frac{6}{37} \cos 2t + \frac{1}{37} \operatorname{sen} 2t$$

Ahora ya podemos sustituir D^2 por $-(2^2)$

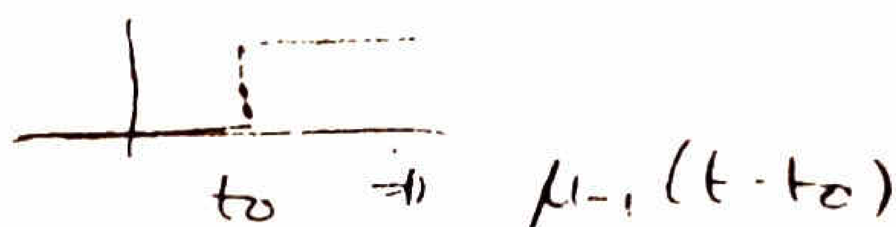
↖ el D de arriba es una derivada

$$\frac{3D-1}{-37} \operatorname{sen} 2t = -\frac{3}{37} D \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{37} \operatorname{sen} 2t$$

Con el coseno se hace de igual forma.

ESCALON

$(D^2+3D+5)y = A\mu_{-1}(t)$



$y_p = \frac{1}{D^2+3D+5}$ (A → constante)

Dividimos el A por el polinomio

$$\begin{array}{l|l} 1 & 5+3D+D^2 \\ -1-\frac{3}{5}D-\frac{1}{5}D^2 & \frac{1}{5}-\frac{3}{25}D+\frac{9}{125}D^2+ \\ \hline \frac{3}{5}D+\frac{4}{25}D^2+\frac{3}{25}D^3 & \\ \hline -\frac{9}{25}D^2-\frac{27}{125}D^3-\frac{9}{125}D^4 & \end{array}$$

Esto continuaría, pero como en este caso es At^0 → esto nos paramos en el primer término en D en el cual su exponente sea mayor que el exponente de t, en este caso tenemos que coger el término con D^0 al igual que es t^0

$$y_p = \left[\frac{1}{5} \Big| -\frac{3}{25}D+\frac{9}{125}D^2+\dots\right]A = \frac{A}{5}$$

En el caso de que fuese

$$y_p = \frac{1}{D^2+3D+5} At = \frac{A}{5}t - \frac{3}{25}A$$ es decir hemos cogido los términos $\frac{1}{5}$ y $-\frac{3}{25}D$

EJEMPLOS

⊛ $(D^2+3D+5)y = \operatorname{sen} 2t + e^{3t} + 2t^2$

$$y_p = \frac{1}{(D^2+3D+5)}\left[\underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{\text{función } f_1} + \underbrace{e^{3t}}_{f_2} + \underbrace{2t^2}_{f_3}\right] = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$$

Se obtienen las soluciones particulares por separado y se suman

⊛ $(D^2+3D+5)y = e^{2t}\cos 3t$

$$y_p = \frac{1}{D^2+3D+5} e^{2t}\cos 3t = e^{2t}\frac{1}{(D+2)^2+3(D+2)+5}\cos 3t = e^{2t}\frac{1}{D^2+7D+15}\cos 3t$$ ← se opera como hemos visto

Podemos pasar la e^{2t} fuera del alcance del polinomio sin más que

* e^{at}

$[(D-1)(D-3)]y = e^{3t}$

$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-3)} e^{3t}$: A veces coincide que el exponente es igual a una de las raíces, en estos casos hacemos:

$= \frac{1}{D-3}\left[\frac{1}{D-1} e^{3t}\right] = \frac{1}{D-3}\left[\frac{1}{2} e^{3t}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{D-3} e^{3t}$

Usamos que:

$\frac{1}{F(D)} e^{at} \cdot f(t) = e^{at} \frac{1}{F(D+a)} f(t)$ Entonces:

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D-3} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{3t} \frac{1}{D+3-3} 1 = \frac{1}{2} e^{3t} \int dt = \frac{1}{2} t e^{3t}$

* $[D^2+3D+5]y = t^4$

$y = \frac{1}{D^2+3D+5} t^4$ Esto lo dividimos $1 \;\overline{\big)\, 5+3D+D^2}$

Esto se aplicará cuando el término independiente es distinto de cero. En el caso de que no existiese término independiente sí que se podría hallar.

$y = \frac{1}{D^2+3D} t^4 = \frac{1}{D(D+3)} \frac{1}{D}\left[\frac{1}{D+3} t^4\right]$ aquí se podría dividir y la solución sería la integral de la solución de $\frac{1}{D+3} t^4$

Otro método para hallar la solución particular de $\operatorname{sen} \omega t$ y $\cos \omega t$

Aplicando la relación de Euler.

$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t$

$\operatorname{sen} \omega t = \operatorname{Im}[e^{i\omega t}]$

$\cos \omega t = \operatorname{Re}[e^{i\omega t}]$

Ejemplo

$(D^2+3D+5)y = \cos \omega t = \operatorname{Re}[e^{i\omega t}]$

$y_p = \frac{1}{D^2+3D+5} \cos \omega t = \frac{1}{D^2+3D+5} \operatorname{Re}[e^{i\omega t}] =$

$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{D^2+3D+5} e^{i\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{(i\omega)^2+3(i\omega)+5} e^{i\omega t}\right]$

$= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{-\omega+3i\omega+5} e^{i\omega t}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{5-\omega-3i\omega}{[5-\omega]^2+(3\omega)^2} e^{i\omega t}\right] =$

$= \frac{5-\omega}{(5-\omega)^2+(3\omega)^2} e^{i(\omega t-\alpha)} = \frac{5-\omega}{25+4\omega^2-10\omega} e^{i(\omega t-\alpha)} = \frac{5-\omega}{25+4\omega^2-10\omega} \cos(\omega t-\alpha)$

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS

$[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n] y = 0$

La ecuación característica de esta ecuación homogénea es

$[a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_n] = 0$

Este polinomio se puede poner (sabiendo sus raíces) de la forma

$[(m-m_1)(m-m_2)\ldots(m-m_n)] = 0$

Si las raíces son reales y distintas

$y_h = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t} + \ldots + C_n e^{m_n t}$

Si son reales y hay alguna repetidas

$[(m-m_1)^r (m-m_2) \ldots (m-m_n)] = 0$

$y_h = (C_1 + C_2 t + \ldots C_r t^{r-1}) e^{m_1 t} + \ldots C_n e^{m_n t}$

Si las raíces son imaginarias

$(m-m_1)(m-m_2) = 0$

siendo

$m_1 = \sigma + jw$
$m_2 = \sigma - jw$ } conjugadas

La solución de la homogénea será:

$y_h = C_1 e^{(\sigma + jw)t} + C_2 e^{(\sigma - jw)t} = C_1 e^{\sigma t}(\cos wt + j\,\text{sen}\,wt) + C_2 e^{\sigma t}(\cos wt - j\,\text{sen}\,wt)$

$= e^{\sigma t}[(C_1+C_2)\cos wt + j(C_1 - C_2)\,\text{sen}\,wt]$

Como la y_h ha de ser real se ha de cumplir que

$C_1 + C_2 = \text{real} \Rightarrow C_1 + C_2 = B$ real

$j(C_1 - C_2) = \text{real} \Rightarrow C_1 - C_2 = jA$

Para que esto se cumpla lo único que se puede dar es que C_1 y C_2 sean complejos conjugados.

$C_1 = a + bj \qquad C_2 = a - bj$

También lo podemos poner de la forma:

$C_1 = A e^{j\psi} \qquad C_2 = A e^{-j\psi} = A\cos\psi - jA\,\text{sen}\,\psi$

Entonces sustituyendo en y_h queda

$y_h = e^{\sigma t}[2A\cos\psi\cos wt - 2A\,\text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,wt] =$

$= e^{\sigma t}\cdot 2A[\cos(wt+\psi)] = 2A e^{\sigma t}\cos(wt+\psi) =$

$= 2A e^{\sigma t}\,\text{sen}(wt+\alpha)$ siendo $\alpha = \psi + 90°$

Se hace $2A = A_0$

ψ y A son dos constantes que se han de determinar

Si saliesen dos raíces complejas

$y_h = \underbrace{(2A)}_{A_0} e^{\sigma t}\cos(wt+\psi) + \underbrace{2A_1}_{A'_0} t\, e^{\sigma t}[\cos(wt+\psi_1)]$ y así sucesivamente.

COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO

Se da en sistemas con ecuaciones de 2° orden

$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$

Ecuación característica $\quad a_0 m^2 + a_1 m + a_2 = 0$

$$m_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_0^2}}$$ si las raíces fuesen imaginarias:

$$m_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \mp i\sqrt{\frac{4a_0a_2-a_1^2}{4a_0^2}}$$

De aquí se pueden presentar tres casos.

- Sistema con amortiguamiento crítico.

$$a_1^2 = 4a_0a_2 \Rightarrow a_1 = 2\sqrt{a_0a_2}$$

- Sistema subamortiguado

$$a_1^2 < 4a_0a_2 \Rightarrow m_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm i\sqrt{\frac{4a_0a_2-a_1^2}{4a_0^2}}$$

- Sistema sobreamortiguado o supraamortiguado

$$a_1^2 > 4a_0a_2 \Rightarrow m_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_0^2}}$$

$$\boxed{\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}}$$ Coeficiente de amortiguamiento

$\xi = 1$ Amortiguamiento crítico

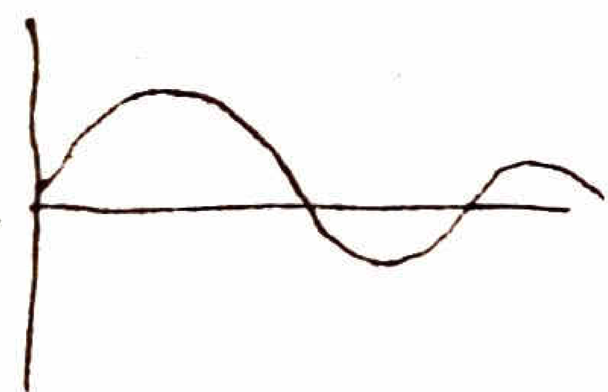
$\xi < 1$ subamortiguado

$\xi > 1$ sobreamortiguado.

$\xi = 0$ sin amortiguamiento

FRECUENCIA NATURAL NO AMORTIGUADA.

Se da en sistemas con ecuaciones de 2° orden.



Normalmente la respuesta del sistema es una sinusoide amortiguada, en el caso que esta sinusoide tenga un coeficiente de amortiguamiento igual a cero, tendremos que la frecuencia natural no amortiguada será la frecuencia de la sinusoide que nos da como respuesta el sistema.

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

Esto se dará cuando no existe resistencia en un circuito eléctrico o rozamiento en uno mecánico

$$m_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \pm i\sqrt{\frac{4a_0a_2-a_1^2}{4a_0^2}} = \pm i\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$$

$$y_h = C_1 e^{i\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}t} = A e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

como $m = \sigma \pm j\omega$

$\sigma = 0$ $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}}$ frecuencia natural no amortiguada.

la y_h quedaría de la forma

$y_h = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\,t + \theta\right)$ vemos que la respuesta en el caso de que $\xi = 0$ sería una sinusoide perfecta

$$\boxed{\omega_n = \omega = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} \qquad \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}}$$

valores importantes del sistema, a calcular cuando tengamos la ecuación diferencial

ECUACION CARACTERISTICA Y RAICES EN FUNCION DE ξ y W_n

$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$

$a_0 m^2 + a_1 m + a_2 = 0$

dividimos por a_0

$m^2 + \frac{a_1}{a_0} m + \frac{a_2}{a_0} = 0$

$\frac{a_1}{a_0} = \left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}\right) 2 \left(\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\right) = 2 \xi W_n$

ξ $\qquad W_n$

luego $m^2 + \frac{a_1}{a_0} m + \frac{a_2}{a_0} = 0$ se puede poner en función de los valores importantes del sistema.

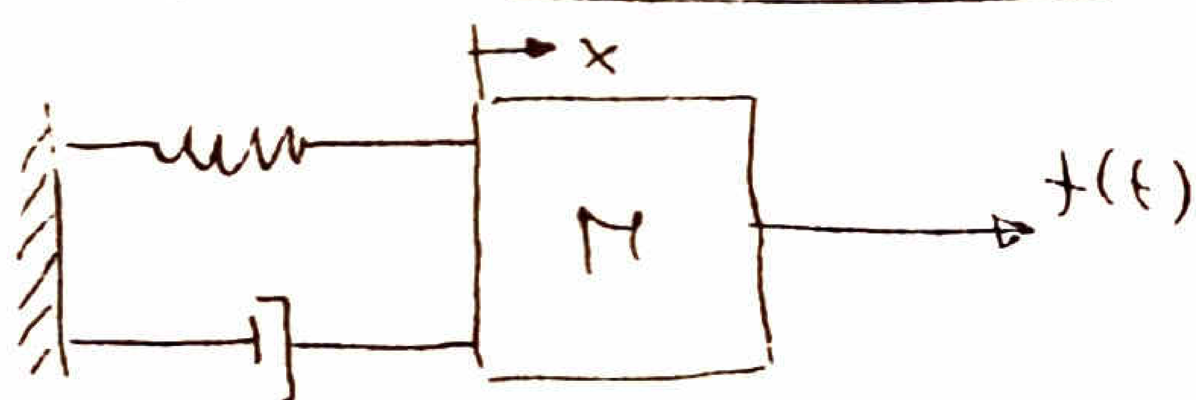
$$m^2 + 2\xi W_n m + W_n^2 = 0$$ forma normalizada

Las raíces también las podremos poner en función de ξ y W_n

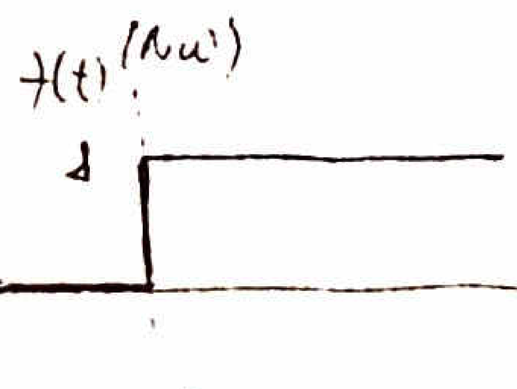
$m_{12} = -\xi W_n \pm j \sqrt{\frac{4W_n^2 - 4\xi^2 W_n^2}{4}}$

$$m_{12} = -\xi W_n \pm j W_n \sqrt{1-\xi^2}$$

PROBLEMAS



Le aplicamos en $t=0$ una función escalón



El sistema parte del reposo

$f = (MD^2 + BD + K)\, x$

$x = x_p + x_h$

x_p: particular; x_h: homogenea

$x_p = \frac{1}{MD^2 + BD + K}\, u(t) = \frac{1}{K}$ (nos da la solución del regimen permanente)

$u(t)$: función escalón

solución transitoria.

$M m^2 + B m + K = 0$

$m^2 + \frac{B}{M} m + \frac{K}{M} = 0$ (forma normalizada)

$m^2 + 2\xi W_n m + W_n^2 = 0$

$m_{12} = -\frac{B}{2M} \pm j \sqrt{\frac{4\frac{K}{M} - \frac{B^2}{M^2}}{4}} = -\xi W_n \pm j W_n \sqrt{1-\xi^2}$

$$W_n^2 = \frac{K}{M}$$ $\qquad \frac{B}{2M} = \xi W_n$

$\frac{B}{M} = 2\xi \sqrt{\frac{K}{M}} \Rightarrow \xi = \frac{B}{2M}\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{B}{2}\sqrt{\frac{1}{KM}} = \xi$

$x_h = A e^{-\xi W_n t} \operatorname{sen}(W_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta)$

$x_p = \frac{}{MD^2+BD+K} \quad \frac{}{K}$

$x = Ae^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta) + \frac{1}{K}$

Necesitamos saber dos condiciones iniciales.

$x(0^+) = x(0)$; $Dx(0)$ — antes de aplicar la fuerza el desplazamiento x lo consideramos cero luego $x(0^+) = x(0) = 0$

Vamos a ver $Dx(0)$

$M D^2 x = f(t)$

$M D(Dx) = f(t)$

$Dx = \frac{1}{MD} f(t) = \frac{1}{M} \int f(t)\, dt = \frac{1}{M} \int_0^t f(t)\, dt + V_0$ ← velocidad inicial = 0

$$\boxed{Dx(0) = 0}$$

ya que $\frac{1}{M} \int_0^t f(t)\, dt \Big|_{t=0}$ sería $\frac{1}{M} \int_0^0 f(t)\, dt = 0$

Además se ve que la velocidad $(D(x))$ empieza en cero al igual que el espacio.

RESPUESTAS DE LOS SISTEMAS

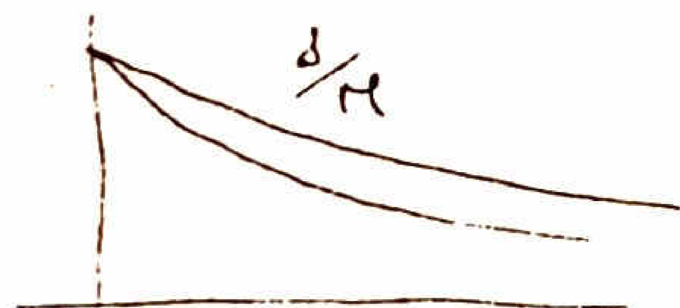
Sobreamortiguado

$\xi > 1 \quad w_{1,2} = -\xi w_n \pm w_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

$y_h = C_1 e^{(-\xi w_n + w_n \sqrt{\xi^2-1})t} + C_2 e^{(-\xi w_n - w_n \sqrt{\xi^2-1})t}$

$\frac{(-\xi w_n + w_n\sqrt{\xi^2-1})}{M}$ cte de tiempo

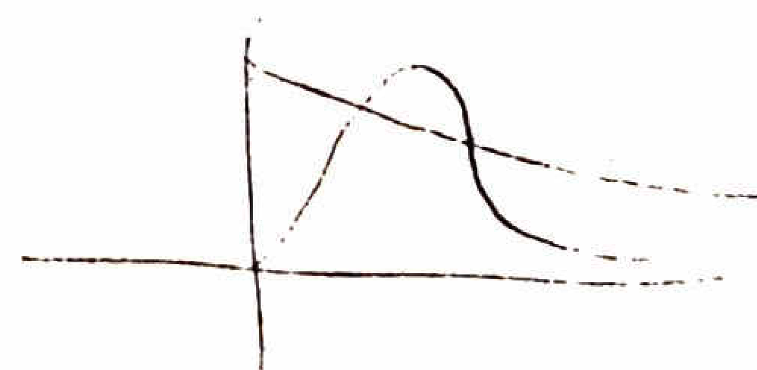
Respuesta:



La total sería la suma de las dos.

Amortiguamiento crítico

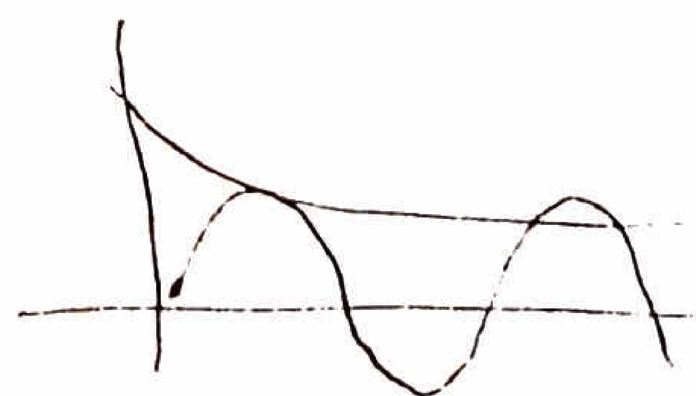
Respuesta:



$\xi = 1 \quad w_{1,2} = -\xi w_n$

$y_h = C_1 e^{-\xi w_n t} + C_2 t e^{-\xi w_n t}$

Sistema infraamortiguado



$\xi < 1 \quad w_{1,2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1-\xi^2}$

$y_h = Ae^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + e)$

Sin amortiguamiento

$\xi = 0 \quad w_{1,2} = \pm j w_n$

$y_h = Ae^{0t} \operatorname{sen}(w_n t + e) = A \operatorname{sen}(w_n t + e)$
onda sinusoidal pura

EJERCICIO

Resolver la ecuación siguiente considerando las condiciones iniciales iguala cero así como sus derivadas

$[(D+1)(D^2+4D+5)]y = t$

$(D+1)(D^2+4D+5) = 0$

• $D^2+4D+5=0 \Rightarrow D = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4\pm 2i}{2}$

$D = \left\langle \begin{array}{l} -2+i \\ -2-i \end{array} \right.$

$y_h = A e^{-t} + A_1 e^{-2t} \operatorname{sen}(t+\theta)$

$y_p = \frac{1}{(D+1)(D^2+4D+5)} t$

$$\begin{array}{l|l} 1 & D^3+5D^2+9D+5 \\ -1-\frac{9}{5}D-D^2-\frac{1}{5}D^3 & \frac{1}{5}-\frac{9D}{25} \\ 0 & \end{array}$$

$y_p = \frac{1}{5}t - \frac{9}{25}$

$y = y_h + y_p = A e^{-t} + A_1 e^{-2t} \operatorname{sen}(t+\theta) + \frac{1}{5}t - \frac{9}{25}$

$y'(t) = -A e^{-t} + (-2A_1 e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) + A_1 e^{-2t}\cos(t+\theta)) + \frac{1}{5}$

$y''(t) = A e^{-t} + 4A_1 e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta) + (-2A_1 e^{-2t}\cos(t+\theta)) - 2A_1 e^{-2t}\cos(t+\theta)$
$+ (-A_1 e^{-2t}\operatorname{sen}(t+\theta)))$

$y(0^+) = y(0) = 0 = y'(0) = y''(0) = 0$

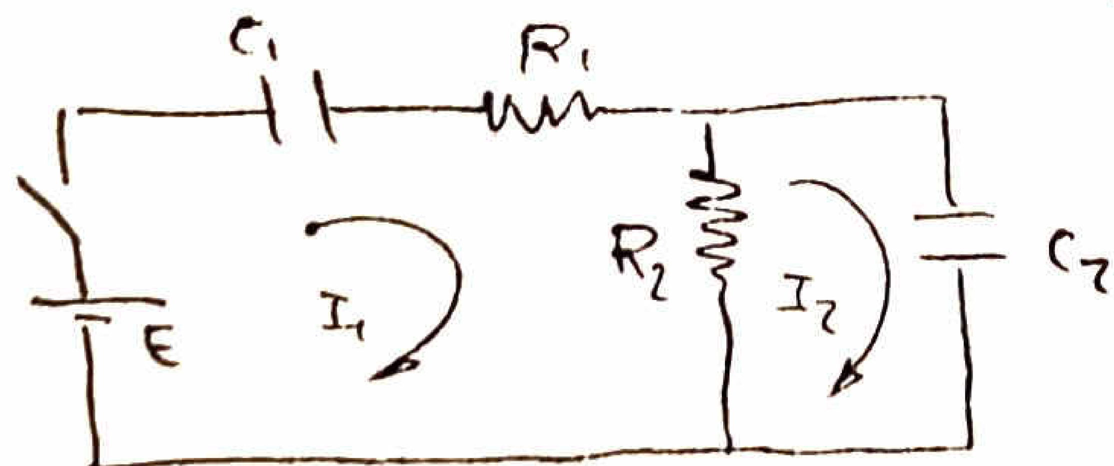
$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = A + A_1\operatorname{sen}\theta - \frac{9}{25} = 0 \\ y'(0) = -A - 2A_1\operatorname{sen}\theta + A_1\cos\theta + \frac{1}{5} = 0 \\ y''(0) = A + 4A_1\operatorname{sen}\theta - 2A_1\cos\theta - 2A_1\cos\theta - A_1\operatorname{sen}\theta = 0 \end{array}\right.$$

Hacemos $\left\{\begin{array}{l} A_1\operatorname{sen}\theta = x \\ A_1\cos\theta = y \\ A = A \end{array}\right.$ $\theta = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

$$\left.\begin{array}{l} A + x - \frac{9}{25} = 0 \\ -A - 2x + y + \frac{1}{5} = 0 \\ A + 3x - 4y = 0 \end{array}\right\}$$ Entonces hallamos las constantes y sustituimos en la ecuación general.

PROBLEMAS

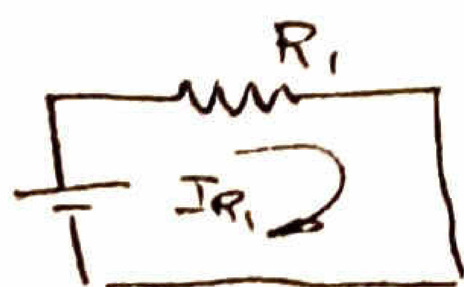
Dada la red eléctrica considerando los condensadores inicialmente descargados calcular la distribución de corrientes (corriente por R_1 y R_2) al cerrar el interruptor.





En el instante t=0 el condensador se comporta como un cortocircuito

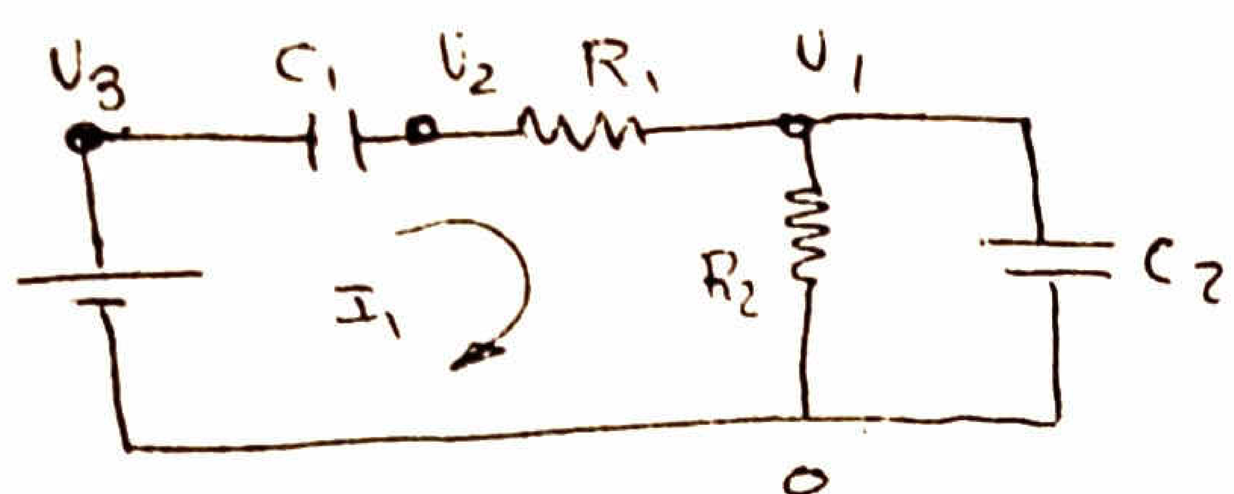
y el circuito será:



$E = I_1 R_1$

$I_{R_1} = \frac{E}{R_1}$

La intensidad que circula en este instante t=0 por la resistencia R_2 es igual a cero $I_{R_2}=0$



Vamos a hallar $V_1\ V_2$ y V_3

$$0 = V_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2D\right) - V_2\left(\frac{1}{R_1}\right) \quad (\Delta)$$

$$0 = V_2\left(\frac{1}{R_1}+C_1D\right) - V_1\frac{1}{R_1} - V_3(C_1D)$$

$$0 = V_3 - E \Rightarrow \boxed{V_3 = E}$$

Vamos a hallar V_1

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2D\right) & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+C_1D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E\,C_1D \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\frac{1}{R_1}E\,C_1D}{\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+C_2D\right]\left[\frac{1}{R_1}+C_1D\right]-\frac{1}{R_1^2}}$$

La ecuación diferencial que saldría sería:

$$\left[C_1C_2D^2+\frac{C_2}{R_1}D+\frac{C_1}{R_2}D+\frac{C_1}{R_1}D+\frac{1}{R_1R_2}\right]V_1 = \frac{C_1}{R_1}DE \quad \text{ya que } DE=0$$

$$\left[C_1C_2D^2+\frac{C_2}{R_1}D+\frac{C_1D}{R_2}+\frac{C_1}{R_1}D+\frac{1}{R_1R_2}\right]V_1 = 0 \quad (M)$$

Con los valores de los componentes vendríamos a esta ecuación. Tenemos que hallar V_1 en $t=0$ y el valor de la derivada de V_1 en este instante ($V_1'(t_0)$)

De la ecuación Δ:

$$C_2(DV_1)_{t=0} - \left(\frac{1}{R_1}\right)V_2(t=0) = 0$$

$$(DV_1)_{t=0} = \frac{E}{R_1C_2} = V_1'(t=0)$$

$$\boxed{V_1 = 0}$$

De (M) sacaríamos la solución que podría ser

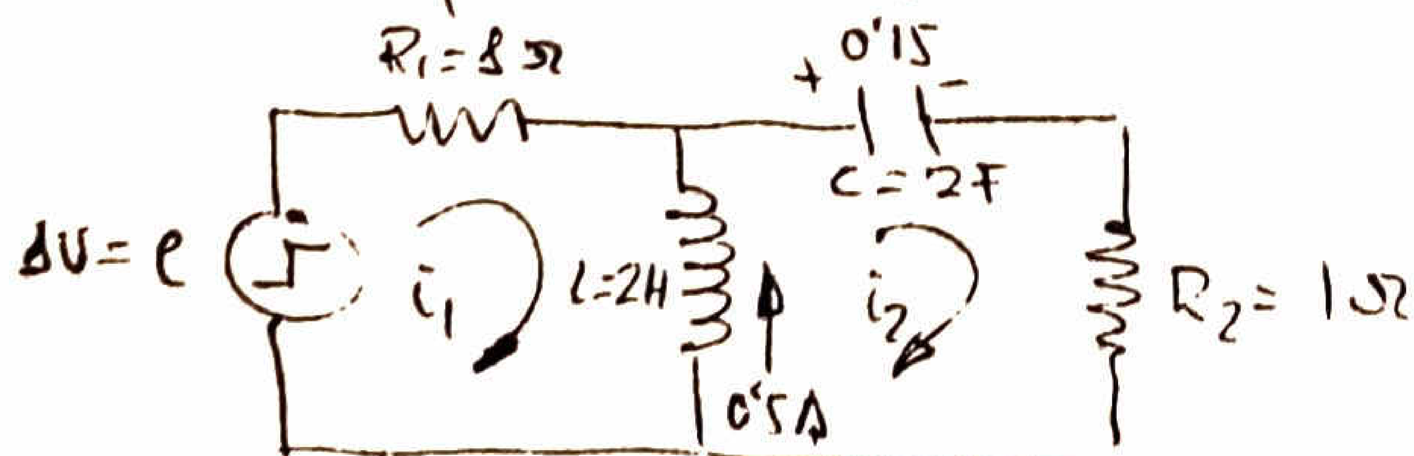
$$V_1 = C_1e^{at} + C_2e^{-at} \quad (R)$$

$$V_{1\,t=0} = C_1 + C_2$$

$$\frac{E}{R_1C_2} = (V_1')_{t=0} = aC_1 - aC_2$$

con lo cual hallaríamos C_1 y C_2 y sustituiríamos en (R).

Calcular la corriente i_2 del circuito de la figura suponiendo el condensador cargado. En $t=0$ se aplica un impulso $\delta(t)$



$$e = (R_1 + LD)i_1 - (D)i_2$$

$$0 = -LDi_1 + \left(LD + \frac{1}{CD} + R_2\right)i_2$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+LD & e \\ -LD & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+LD & -LD \\ -LD & LD+\frac{1}{CD}+R_2 \end{vmatrix}} = \frac{LDe}{R_1LD+\frac{R_1}{CD}+R_1R_2+\frac{L}{C}+LR_2D}$$

$$i_2 = \frac{LCD^2 e}{R_1 LCD^2 + R_1 + R_1 R_2 CD + LD + LR_2 CD^2}$$

$$[(R_1+R_2)LCD^2 + (R_1R_2C+L)D + R_1]\, i_2 = LCD^2 e$$

$$[8D^2 + 4D + 1]\, i_2 = 0$$

$D^2 e = 0$ la derivada de un escalón es cero y por lo tanto solo hay régimen transitorio.

$$D = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{16} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{1}{4}$$

la corriente i_2 de salida sería.

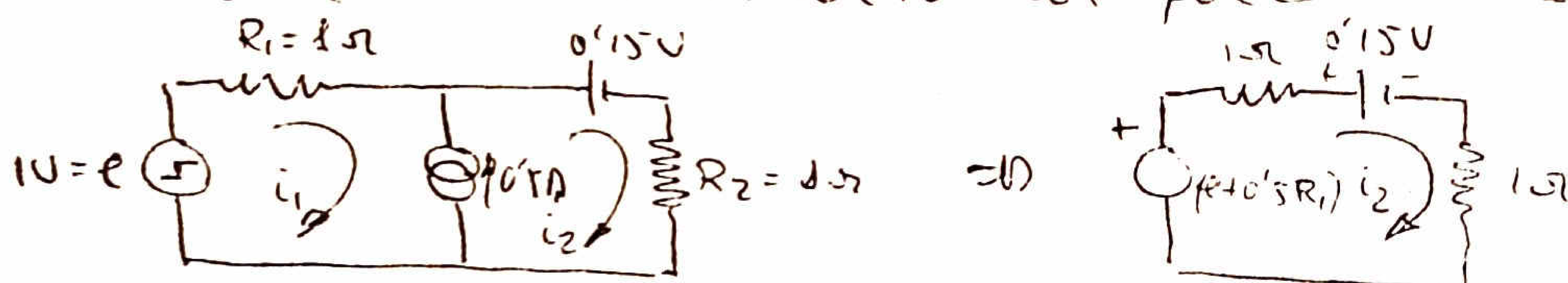
$$i_2 = A e^{-\frac{1}{4}t} \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{4}t + \varphi\right)$$

Vamos a hallar A y φ con las condiciones iniciales. Vamos a ver lo que vale i_2 en $t=0$ y su derivada en el mismo instante.

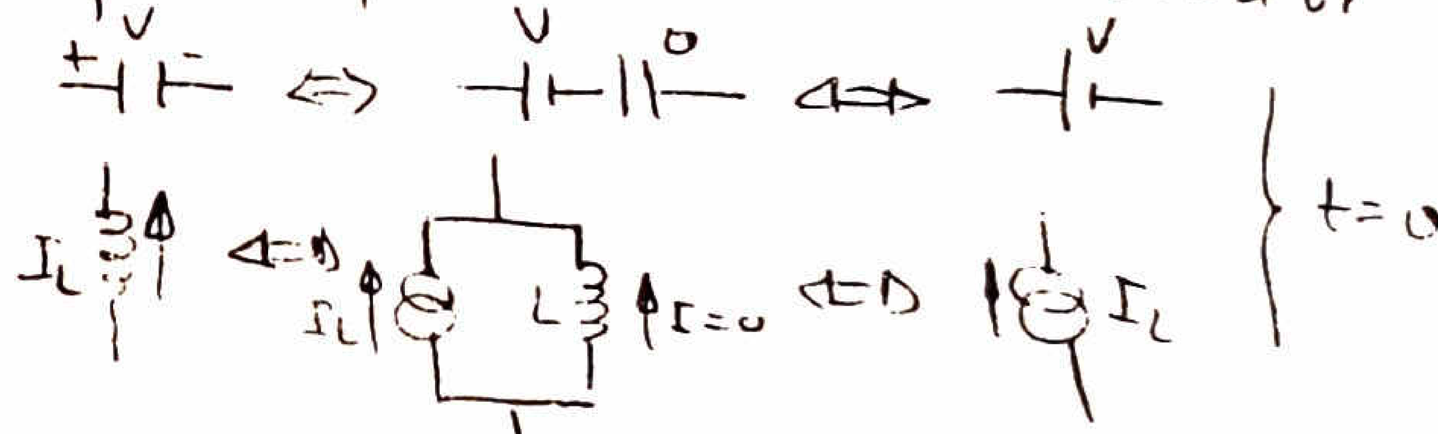
① $i_2(t=0) = A \operatorname{sen} \varphi$

② $D i_2(t=0) = -\frac{1}{4} A \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{4} A \cos\varphi$

Para $t=0^+$ el circuito nos queda de la forma.



Solo vale en las condiciones iniciales y es equivalente al anterior. En $t=0$ la bobina se comporta como un generador de corriente y el condensador como una pila



$$i = \frac{1}{CD} e = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} e\,dt + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} e\,dt$$

$$i_{2(t=0)} = \frac{e + 0'5R_1 - 0'15}{R_1 + R_2} = \frac{0'5 + 1 - 0'5}{2} = 0'675\ A$$

Igualando con la ①

$$0'675 = A \operatorname{sen}\varphi$$

Ahora vamos a hallar $Di_2(t=0)$ para ello a la vista de las ecuaciones del circuito. Lo subrayado es conocido.

$$\begin{cases} E = R_1 i_1(t=0) + L(Di_1)_{t=0} - L(Di_2)_{t=0} \\ 0 = -L(Di_1)_{t=0} + L(Di_2)_{t=0} + \frac{1}{CD} i_2\big|_{t=0} + R_2 i_2(t=0) \end{cases}$$

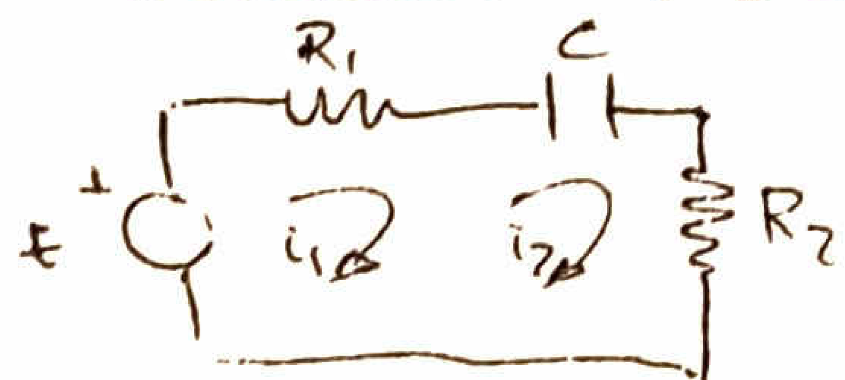
$$i_1 = -0'5 + i_2 = 0'175$$

$$\frac{1}{CD} i_{2(t=0)} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2\,dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_2\,dt = 0'15 \text{ carga inicial del condensador}$$

$$\begin{aligned} 0'825 &= L(Di_1)_0 - L(Di_2)_0 \\ -0'825 &= -L(Di_1)_0 + L(Di_2)_0 \end{aligned}$$

son iguales y no se puede resolver por este camino

Vamos a buscar con otra malla.



$$e = R_1 i_1 + \left(\frac{1}{CD} + R_2\right) i_2$$

Derivamos puesto que lo que buscamos

$0 = R_1 D i_1 + \frac{1}{C} i_2 + R_2 D i_2$

$0 = R_1 (D i_1)_{t=0} + \frac{1}{C} i_{2(t=0)} + R_2 (D i_2)_{t=0}$

$* \ \frac{1}{C} i_2 = \frac{1}{2} \, 0'675 = 0'337$

$$\begin{cases} -0'337 = R_1 (D i_1)_{t=0} + R_2 (D i_2)_{t=0} \\ 0'825 = L (D i_1)_{t=0} - L (D i_2)_{t=0} \end{cases}$$

De aquí ya sacamos $(D i_2)_{t=0}$ lo que nos dieto lo igualaríamos con la ecuación ②

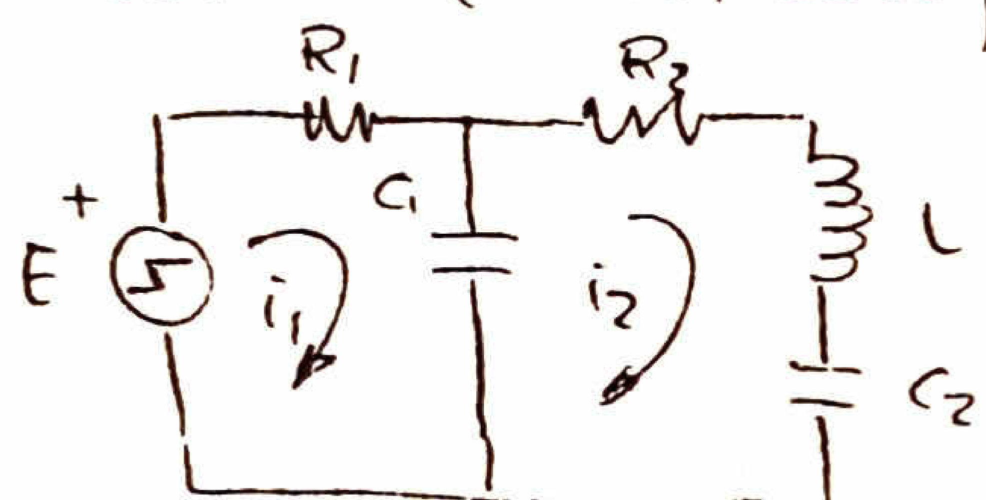
$-\frac{1}{4} A \operatorname{sen} e + \frac{1}{4} A \cos e = (D i_2)_{t=0}$

$0'675 = A \operatorname{sen} e$

Con estas dos sacamos A y e.

—o()o—

Calcular i_2 con condiciones iniciales nulas, es decir, con condensadores descargados y por la bobina no circula intensidad



$$\begin{cases} ① \ E = \left(R_1 + \frac{1}{C_1 D}\right) i_1 - \frac{1}{C_1 D} i_2 \\ ② \ 0 = -\frac{1}{C_1 D} i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D} + LD\right) i_2 \end{cases}$$

Como nos piden i_2

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 D} & E \\ -\frac{1}{C_1 D} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 D} & -\frac{1}{C_1 D} \\ -\frac{1}{C_1 D} & R_2 + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D} + LD \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{C_1 D} E}{R_1 R_2 + \frac{R_1}{C_1 D} + \frac{R_1}{C_2 D} + R_1 L D + \left(-\frac{1}{C_1^2 D^2}\right) + \frac{R_2}{C_1 D} + \frac{1}{C_1^2 D^2} + \frac{1}{C_1 C_2 D^2} + \frac{L}{C_1}}$$

multiplicamos por $C_1 C_2 D^2$

$$i_2 = \frac{C_2 D E}{R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 + R_1 C_2 D + R_2 C_1 D + R_1 L C_1 C_2 D^3 + R_2 C_2 D + 1 + L C_2 D^2}$$

$[R_1 L C_1 C_2 D^3 + (R_1 R_2 C_1 C_2 + L C_2) D^2 + (R_1 C_2 + R_2 C_1 + R_2 C_2) D + 1] \, i_2 = C_2 D E$

Supongamos que hemos operado y han salido las raíces

$[(D-a)(D-\alpha+j\beta)(D-\alpha-j\beta)] \, i_2 = 0$

$$\boxed{i_2 = C_1 e^{at} + A e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + e)}$$

Ahora necesitamos tres ecuaciones para hallar C_1, A, β

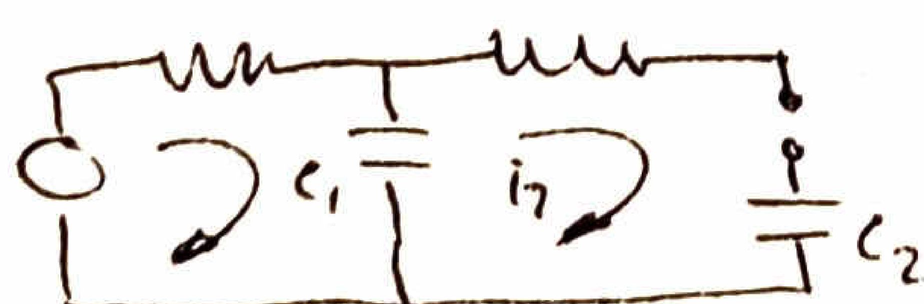
Estas tres ecuaciones serán las de

$i_{2(t=0)}$; $(D i_2)_{t=0}$; $(D^2 i_2)_{t=0}$

$\downarrow$ $\downarrow$

$C + A \operatorname{sen} \varphi$ $\quad aC_1 + \alpha A \operatorname{sen} \varphi + \beta A \cos \varphi$

El circuito equivalente sería:



$i_2(t=0) = 0$

Por otra parte

$\frac{1}{C_2 D} i_{2(t=0)} = 0$

carga del C_2 en $t=0$

$\frac{1}{C_1 D} i_2 - \frac{1}{C_1 D} i_1 = \frac{1}{C_1 D}(i_2 - i_1) = 0$ carga inicial en C_1

$$0 = -\frac{1}{C_1 D} i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_2 D} + LD\right) i_2$$

$$-\frac{1}{C_1 D} i_1 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_1 D} i_2 + \frac{1}{C_2 D} i_2 + LD i_2 = 0$$

carga de C_1 en $t=0$ que es cero

es cero porque $i_{2(t=0)} = 0$

carga de C_2 en $t=0$ que es cero

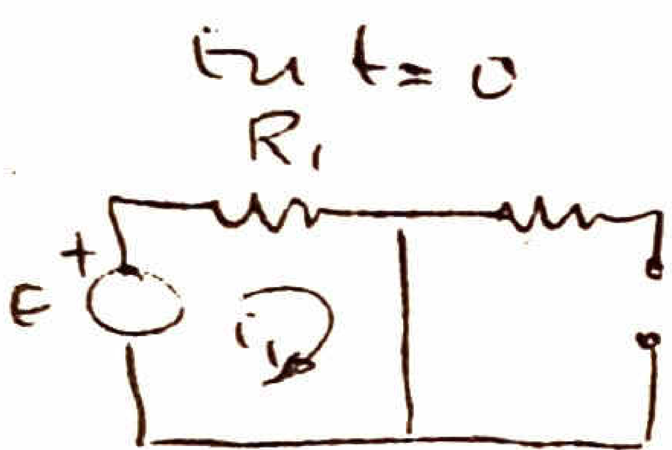
$$LDi_2 = 0 \Rightarrow \boxed{Di_2 = 0}$$

Derivamos la ecuación (2)

$$0 = -\frac{1}{C_1} i_1 + \left(R_2 D + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + LD^2\right) i_2$$

0 0 0

En $t=0$



$$i_1 = \frac{E}{R_1}$$

$$-\frac{E}{R_1 C_1} + LD^2 i_2 = 0$$

$$\boxed{D^2 i_{2(t=0)} = \frac{E}{L R_1 C_1}}$$

Así tendríamos:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1 + A \operatorname{sen} \psi = 0 \\ a C_1 + \alpha A \operatorname{sen} \psi + \beta A \cos \psi = 0 \\ D^2 (C_1 e^{at} + A e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varepsilon))_{t=0} = \frac{E}{L R_1 C_1} \end{array}\right.$$

con estas hallamos C_1, A y ε



SISTEMAS DE 2° ORDEN

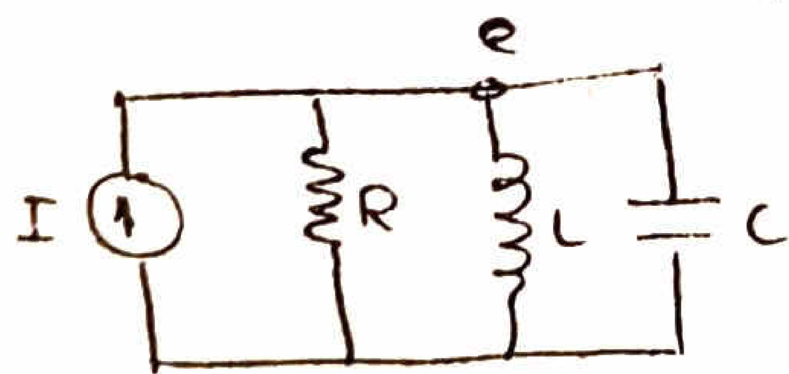
Habíamos visto que si teníamos

$$(a_0 D^2 + a_1 D + a_2) y = f(t)$$

Homogenea $a_0 D^2 + a_1 D + a_2 = 0$

$$D^2 + 2\xi w_n D + w_n^2 = 0$$ respuesta queda $\Rightarrow A e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \varepsilon)$

vamos a ver con un ejemplo el modo de hallar ξ y w_n



$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{LD} + CD\right) e$$

Conviene quitar los D que están integrando multiplicamos para ello por LD

$$LDI = \left(LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1\right) e$$

$$LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1 = 0 \Rightarrow D^2 + \frac{1}{CR} D + \frac{1}{LC} = 0$$ dividiendo por LC

comparandola con

$$D^2 + 2\xi w_n D + w_n^2 = 0$$

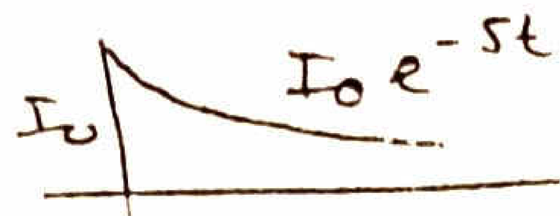
Tenemos que

$$\boxed{w_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \frac{1}{CR} = 2\xi \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Según sea la respuesta que queramos (RC tendrán unos determinados valores

L y C vienen determinados así siempre

- Ahora vamos a excitar el circuito de la pág. anterior con una exponencial



y vamos a ver la respuesta.

planteamos la ecuación de nudos.

$$I = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{LD} + CD\right) e$$

$$LDI = \left(LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1\right) e$$

$$LD(I_o e^{-5t}) = -5L\, I_o e^{-5t} = \left(LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1\right) e$$

la solución permanente e_p es

$$e_p = \frac{1}{LCD^2 + \frac{L}{R} D + 1}\left(-5L I_o e^{-5t}\right) = \frac{-5L I_o e^{-5t}}{LC(-5)^2 - \frac{L}{R}5 + 1}$$

Esta solución se sumaría con la homogénea

$A e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \varphi)$ y tendríamos la solución total.

Vamos a ver qué forma tiene la respuesta en función de w_n y ξ cuando la excitación es una función impulso escalón de valor w_n^2 para que la solución permanente tienda a 1

$$(D^2 + 2\xi w_n D + w_n^2) e = f(t) \quad (1)$$

$$e_h = A e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \psi)$$

Despejando de (1) la e

solución permanente $e_p = \dfrac{1}{D^2 + 2w_n\xi D + w_n^2} w_n^2 = 1$ ya que $\boxed{w_n^2 = f(t)}$

Solución total: $e_p + e_h = A e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}(w_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \psi) + 1$

$$\left.\begin{aligned} e_{t=0} &= 0 \\ (De)_{t=0} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &1 + A \operatorname{sen}\psi = 0 \quad (1) \\ &-\xi w_n A \operatorname{sen}\psi + w_n\sqrt{1-\xi^2}\, A\cos\psi = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

con la (2) sacamos:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{w_n\sqrt{1-\xi^2}}{\xi w_n} = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\psi} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\psi}}{\cos\psi}$$

comparando

$$\cos\psi = \xi \qquad \boxed{\psi = \arccos\xi}$$

Con este valor vamos a la (1)

$$1 + A\sqrt{1-\cos^2\psi} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Con estos valores de A y ψ vamos a la solución total

$$e = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen}\left(w_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \cos^{-1}\xi\right)$$

respuesta; $w_n\sqrt{1-\xi^2} = w_a$

Vamos a representar esta función.

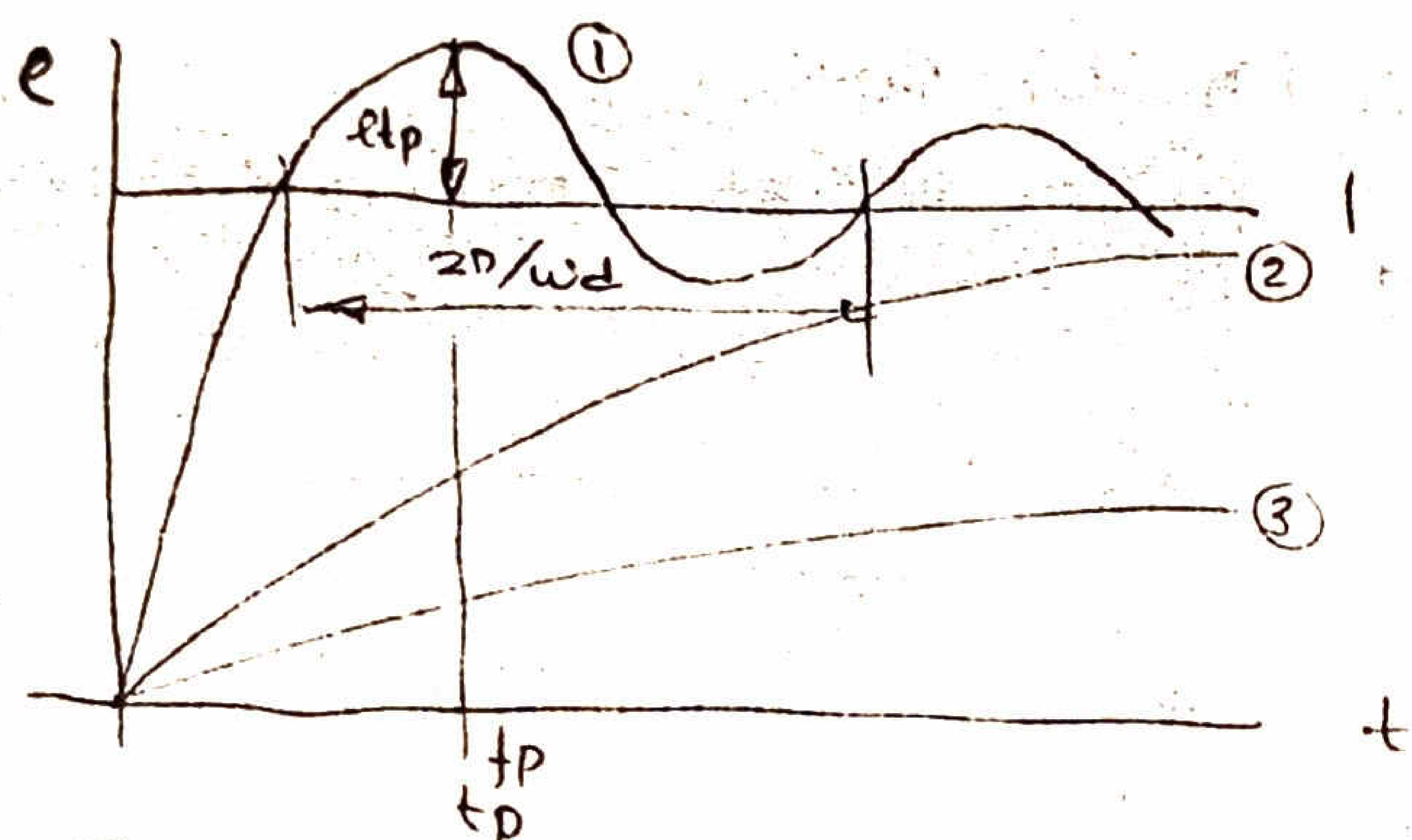
Para un tiempo infinitamente grande el segundo término

• Para $t=0$ tenemos:

$$e = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\operatorname{sen}(\cos^{-1}\xi) \quad \text{pero como}$$

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}\xi) = \sqrt{1-[\cos(\cos^{-1}\xi)]^2} = \sqrt{1-\xi^2}$$

Por lo que $e=0$ en $t=0$



$\xi < 1$ obtenemos ondas sinusoidales amortiguadas ① que sobrepasan a veces el valor final es el que más rápido llega al valor de e

$\xi = 1$ No sobrepasan el valor final se acercan a él pero no llegan ② ondas exponenciales.

$\xi \gg 1$ ondas exponenciales que se acercan al valor final con menor rapidez que las de $\xi = 1$ ③

Vamos a hallar la máxima elongación y en que instante se verifica

Para ello derivamos la respuesta

$$\frac{de}{dt} = +\xi\omega_n \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}\xi) -$$

$$-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}\xi) = 0$$

Como buscamos el instante en que la elongación es máxima y ese instante es $t=t_p$ sustituimos t por t_p

$$\xi\,\operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p + \cos^{-1}\xi) = \sqrt{1-\xi^2}\,\cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p + \cos^{-1}\xi)$$

De esta ecuación hallamos la tangente.

$$\operatorname{tg}(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p + \cos^{-1}\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\frac{\boxed{\operatorname{tg}(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p)} + \operatorname{tg}(\cos^{-1}\xi)}{1 - \boxed{\operatorname{tg}(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p)\,\operatorname{tg}(\cos^{-1}\xi)}} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad ①$$

$$② \quad \operatorname{tg}(\cos^{-1}\xi) = \frac{\operatorname{sen}(\cos^{-1}\xi)}{\cos(\cos^{-1}\xi)} = \frac{\sqrt{1-[\cos(\cos^{-1}\xi)]^2}}{\cos(\cos^{-1}\xi)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Comparando ① con ② para que se cumpla la ② en la ① sobran los términos encuadrados, es decir son cero.

$$\operatorname{tg}\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t_p = 0$$

$$t_p\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi.$$

El valor de $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ → para este tiempo tenemos la máxima elongación.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \boxed{\frac{\pi}{\omega_d} = t_p}$$

El valor de la tensión para el tiempo $t = t_p$

$$e_{tp} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} + \cos^{-1} \xi\right)$$

$$e_{tp} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \operatorname{sen}(\pi + \cos^{-1}\xi) \quad (*)$$

como

$$\operatorname{sen}(\pi + \cos^{-1}\xi) = \operatorname{sen}\pi \cos(\cos^{-1}\xi) + \cos\pi \operatorname{sen}(\cos^{-1}\xi)$$

habíamos visto también que

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}\xi) = \sqrt{1-\xi^2}$$

sustituyendo en (*)

$$e_{tp} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \left(-\sqrt{1-\xi^2}\right) = \boxed{1 + e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e_{tp}}$$

Es lo que nos sobrepasamos de e

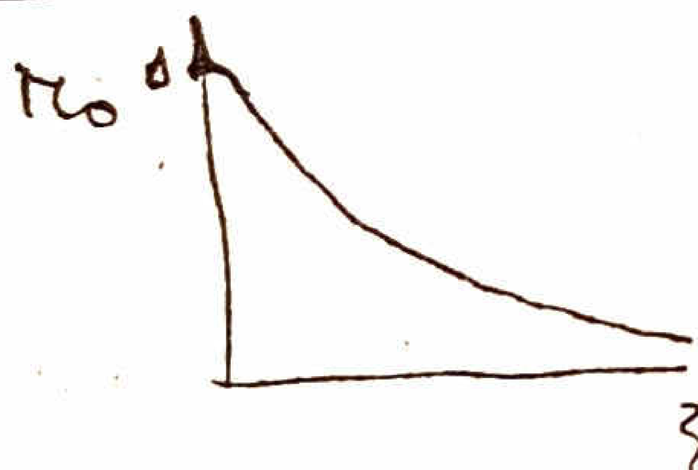
COEFICIENTE DE ELONGACION

Coeficiente de elongación en tanto por uno $M_o = \frac{e_{tp} - e_{ss}}{e_{ss}}$

e_{tp} = valor de la variable de salida cuando se produce la máxima elongación

e_{ss} = valor de la variable de salida en régimen permanente

$$\boxed{M_o = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}$$



ω_n = frecuencia natural no amortiguada

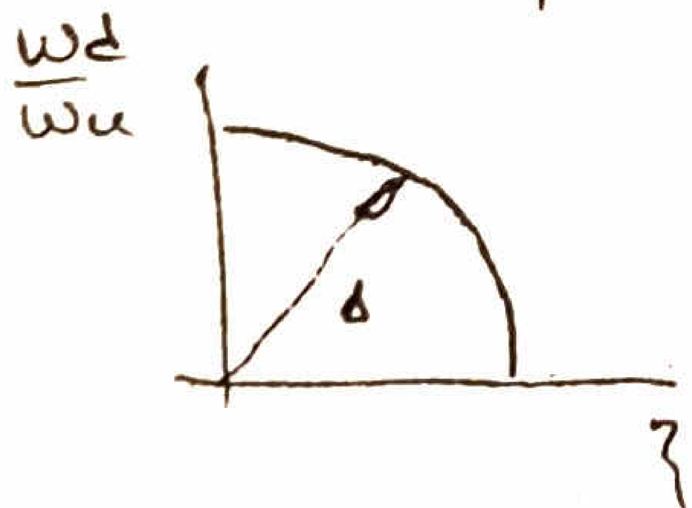
ω_d = " " amortiguada.

RELACION ENTRE ω_d y ω_n

La ω_d no debe coincidir con las oscilaciones de ningún componente.

Habíamos dicho que:

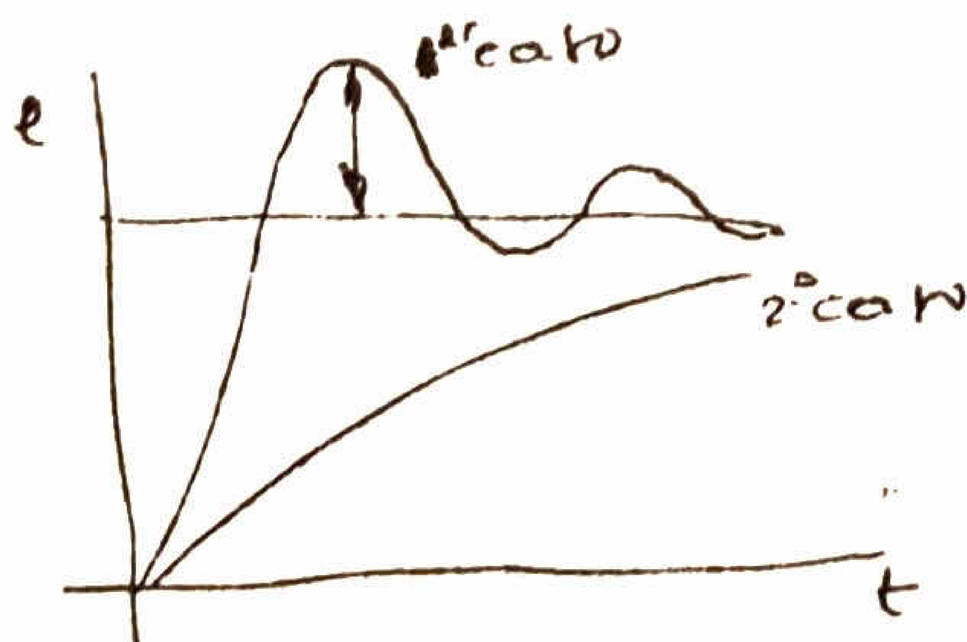
$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} = \omega_d \Rightarrow \frac{\omega_d}{\omega_n} = \sqrt{1-\xi^2}$$

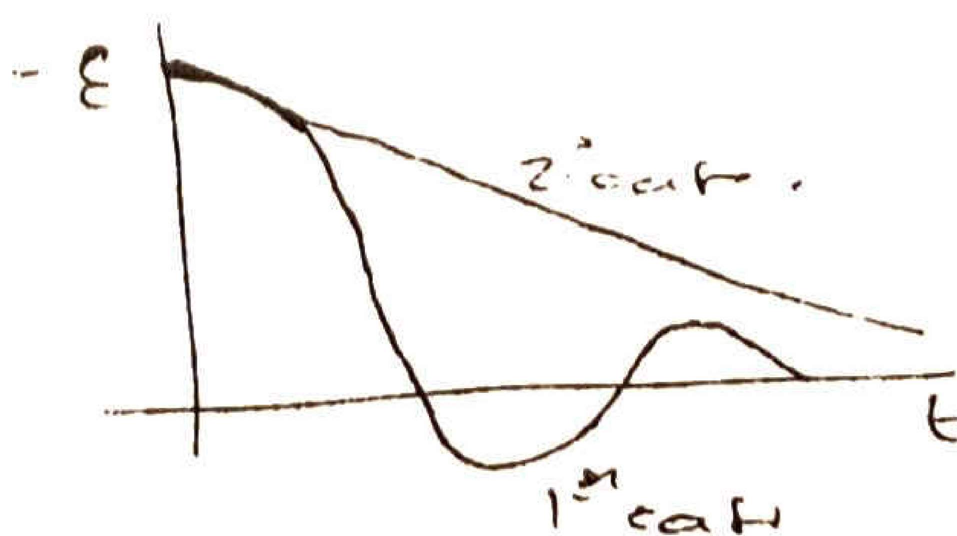


ERROR DEL SISTEMA

$$\varepsilon = e - e_{ss}$$

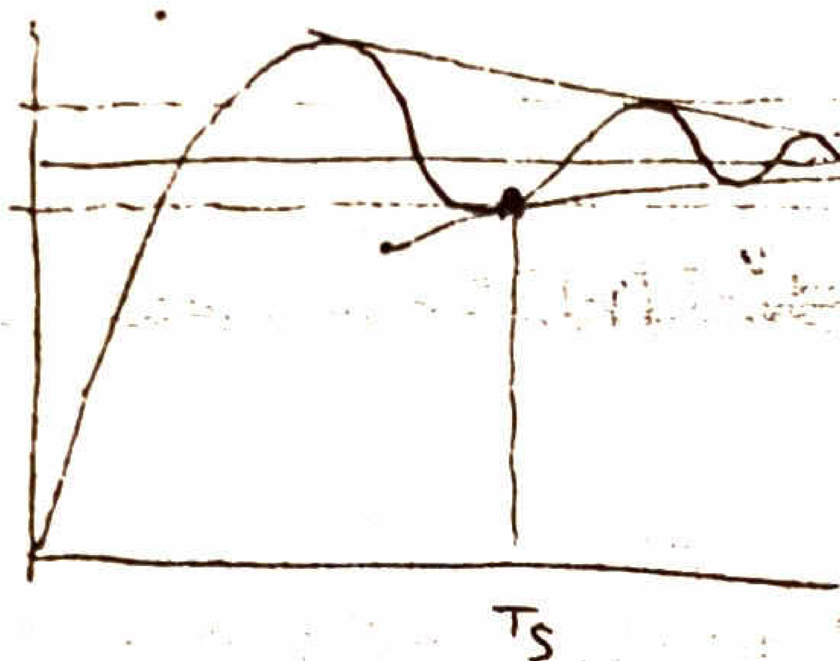
e = valor de salida en cualquier instante.





TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO

Es el tiempo en el cual el error es menor que cierto valor ya fijado anteriormente.



Donde se corten las rectas y la exponencial envolvente de la sinusoidal amortiguada será el tiempo $t = T_s$

Supongamos que el error tiene que ser menor que el 2% del valor final de la salida (en este caso 1)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \cos^{-1}\xi\right)$$

En nuestro caso

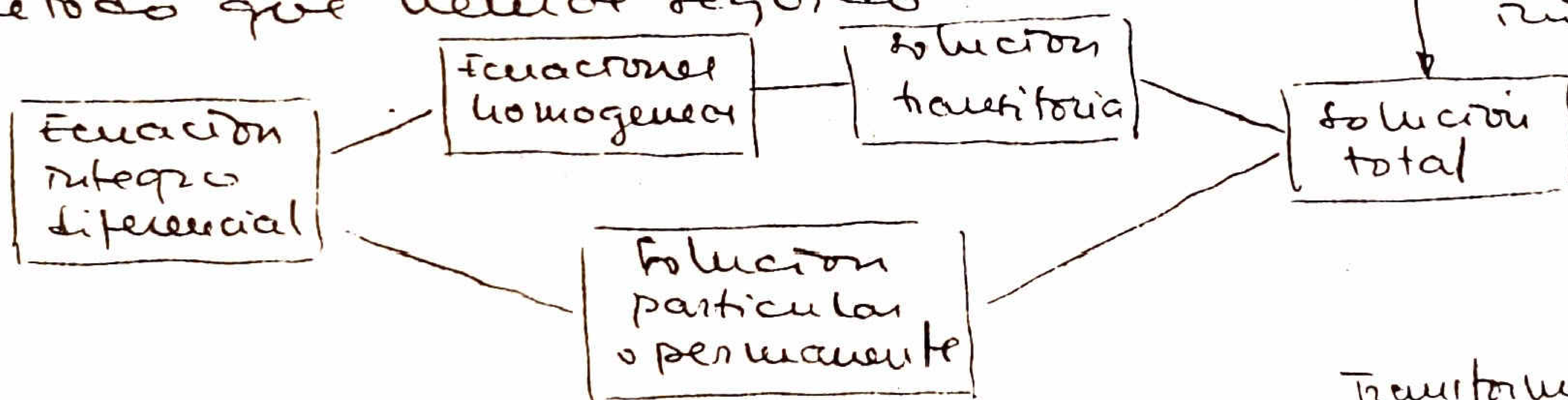
$$0'02 = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_s} \Rightarrow 0'02 \sqrt{1-\xi^2} = e^{-\xi \omega_n T_s}$$

$$\boxed{T_s = \frac{\ln 0'02 \sqrt{1-\xi^2}}{-\xi \omega_n}}$$

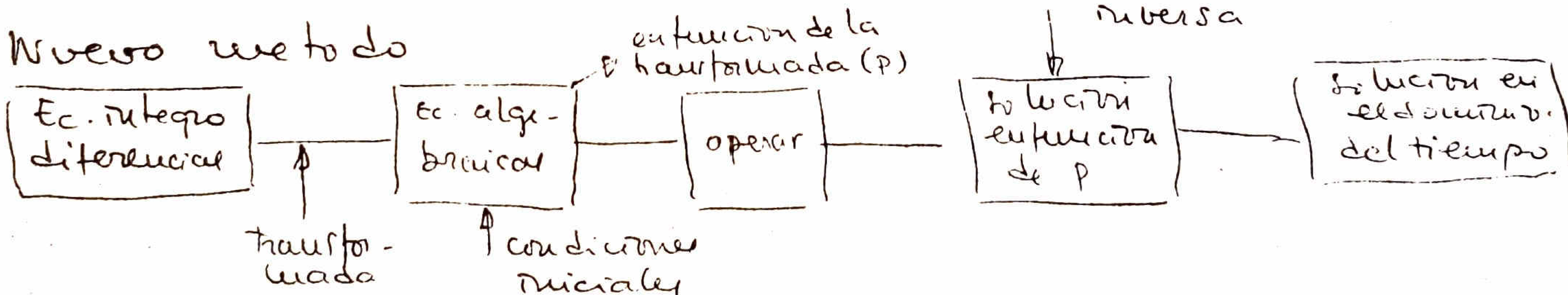
TRANSFORMADA DE LAPLACE

Es otro método para resolver ecuaciones diferenciales.

Método que hemos seguido:



Nuevo método



Si tenemos una función $f(t)$ su transformada se define como:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (p = \sigma + j\omega)$$

Condiciones de existencia

$f(t)$ continua de 0 a ∞ y acotada.

Propiedades

$$\mathcal{L}[a f(t)] = a \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(p) \pm F_2(p)$$

TRANSFORMADAS:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a} \quad \text{sólo para } p > a$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

función escalón: $\mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{p}$

" rampa $\mathcal{L}[t^1] = \frac{1}{p^2}$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p-a)$$

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(p)}{dp} \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

$$\mathcal{L}[Df(t)] = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[D^2 f(t)] = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[D^n f(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^n(0)$$

Transformada de una integral:

$$D^{-1} f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\,dt$$

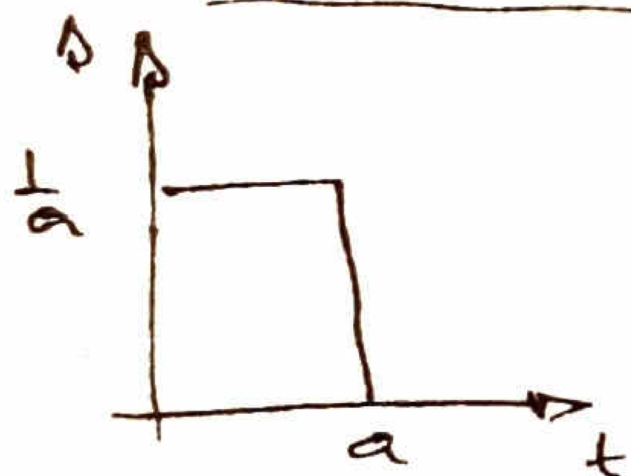
$$\mathcal{L}[D^{-1} f(t)] = \frac{1}{p} F(p) + \frac{[D^{-1} f(t)]_0}{p}$$

$$\frac{D^{-1} f(t)}{p} = \frac{1}{p} e^0 \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$$

$$\int_0^t f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

TRANSFORMADO DE LA FUNCION IMPULSO DE DIRAK



Se define $\delta(t)$ $\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{a} & 0<t<a \\ 0 & t>a \end{cases}$

Además esto se verifica cuando a tiende a cero.

Se dice que el area englobada por la $\delta(t)$ es uno

$$\int_0^t \delta(t)\,dt = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to 0} \int_0^a \frac{1}{a} e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to 0} \left(-\frac{1}{pa} e^{-pt}\right)_0^a$$

$$= \lim_{a\to 0} \left[-\frac{1}{pa}(e^{-ap}-1)\right] = \lim_{a\to 0} \frac{1}{pa}\left[1-e^{-ap}\right] =$$

la desarrollamos en serie

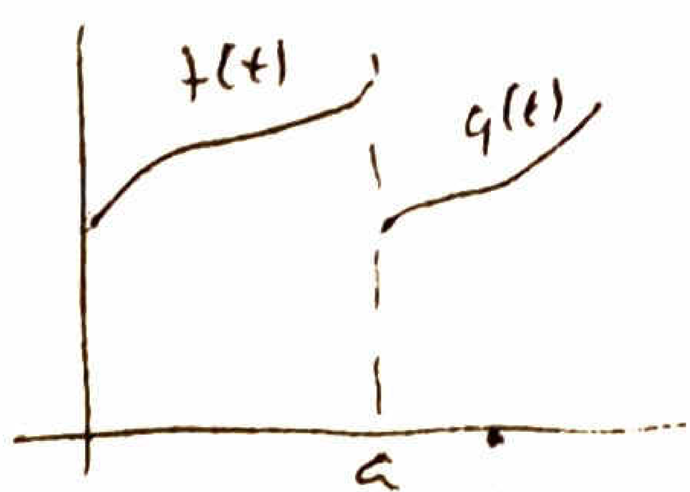
$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{pa}\left[1-\left(1-pa+\frac{p^2a^2}{2}-\frac{p^3a^3}{3!}+\dots\right)\right] =$$

$$= \lim_{a\to 0} \frac{1}{pa}\left[pa-\frac{p^2a^2}{2}+\frac{p^3a^3}{3!}\right] = \lim_{a\to 0}\left(1-\frac{pa}{2}+\frac{p^2a^2}{3!}\right) = 1$$

Es una función teórica.

Transformada de una función desplazada en el tiempo (Propiedad)

$g(t)$ es $f(t)$ trasladada en el tiempo



$$g(t) = \begin{cases} 0 & t<a \\ f(t-a) & t>a \end{cases}$$

Se puede poner también

$$g(t) = f(t-a)\,u(t-a)$$

impulso escalón

a   2a   3a

Aplicaremos las propiedades:

$$\mathcal{L}\left[\sum^{n} f_i(t)\right] = \sum^{n} \mathcal{L}\left[f_i(t)\right]$$

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\mu(t-a)\right] = e^{-ap}\,\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$f(t) = \mu(t) - 2\mu(t-a) + 2\mu(t-2a) - 2\mu(t-3a)$$

$$f(t) = \mu(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mu(t-na)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\mu(t)] + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathcal{L}[\mu(t-na)] =$$

$$= \frac{1}{p} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{p}e^{-nap} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap} + \frac{2}{p}e^{-2ap} - \frac{2}{p}e^{-3ap} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap}\left(1 - e^{-ap} + e^{-2ap} - e^{-3ap}\dots\right) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p}e^{-ap}\frac{1}{1+e^{-ap}}$$

Suma de términos de una sucesión alternada $= \dfrac{\text{primer término}}{1 + \text{razón}}$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{2e^{-ap}}{1+e^{-ap}}\right] = \frac{1}{p}\left[\frac{1-e^{-ap}}{1+e^{-ap}}\right]$$

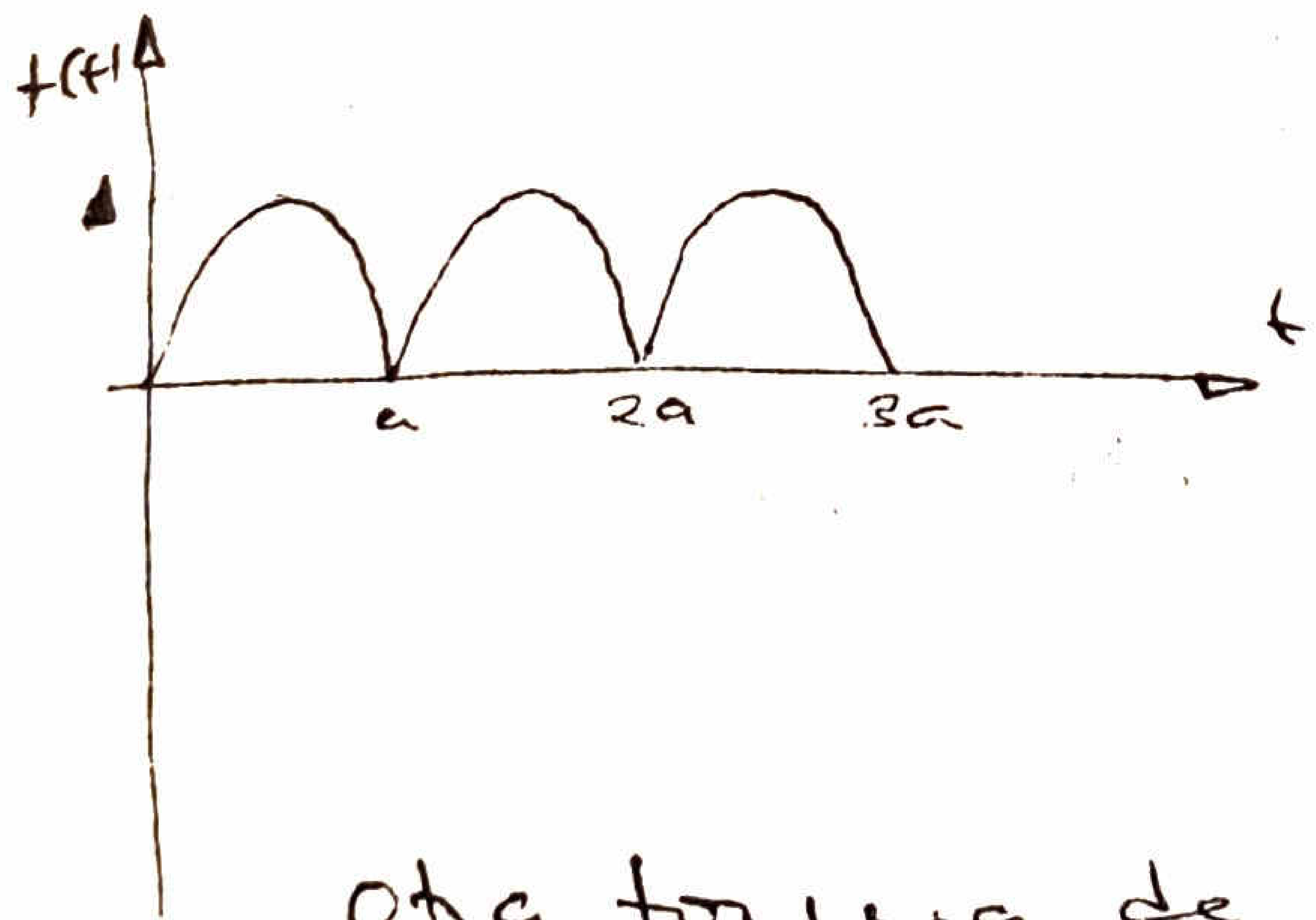
Por otra parte.

$$\mathrm{Th}\left(\frac{ap}{2}\right) = \frac{e^{\frac{ap}{2}} - e^{-\frac{ap}{2}}}{e^{\frac{ap}{2}} + e^{-\frac{ap}{2}}} = \frac{1-e^{-ap}}{1+e^{-ap}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p}\,\mathrm{th}\,\frac{ap}{2}}$$

—o()o—

Resolver y hallar la transformada de:



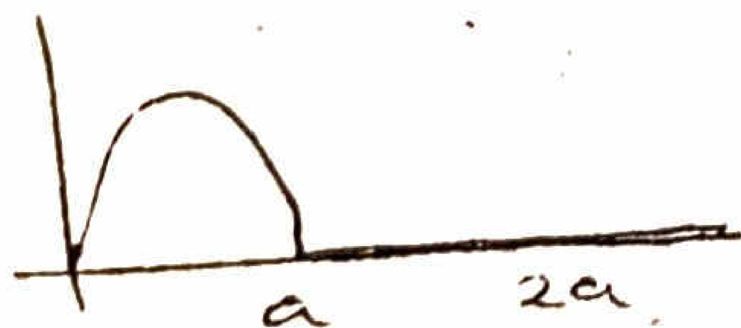
Se puede descomponer.

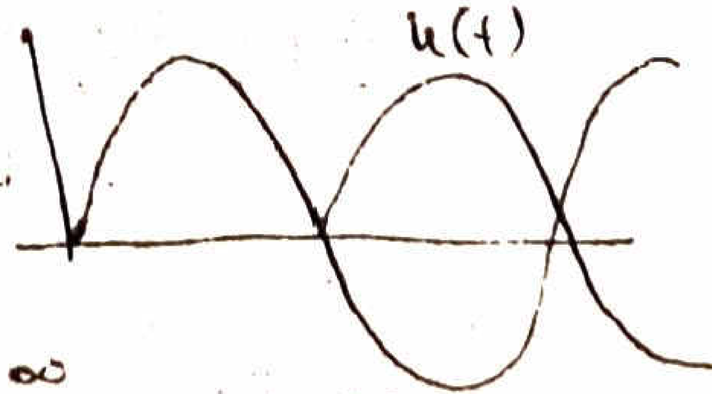
$$f(t) = \mathrm{sen}(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{sen}(\omega(t-na))$$

$$f(t) = \mathrm{sen}\,\omega t + \sum_{1}^{\infty} 2\,\mathrm{sen}\,\omega(t-na)\,\mu(t-na)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2a} = \frac{\pi}{a}$$

otra forma de descomponerla





$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} h(t-na)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nap}\,\mathcal{L}[h(t)]$$

$$h(t) = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{a}t + \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{a}(t-a)$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{\pi/a}{\frac{\pi^2}{a^2} + p^2} + e^{-ap}\frac{\frac{\pi}{a}}{\frac{\pi^2}{a^2} + p^2}$$

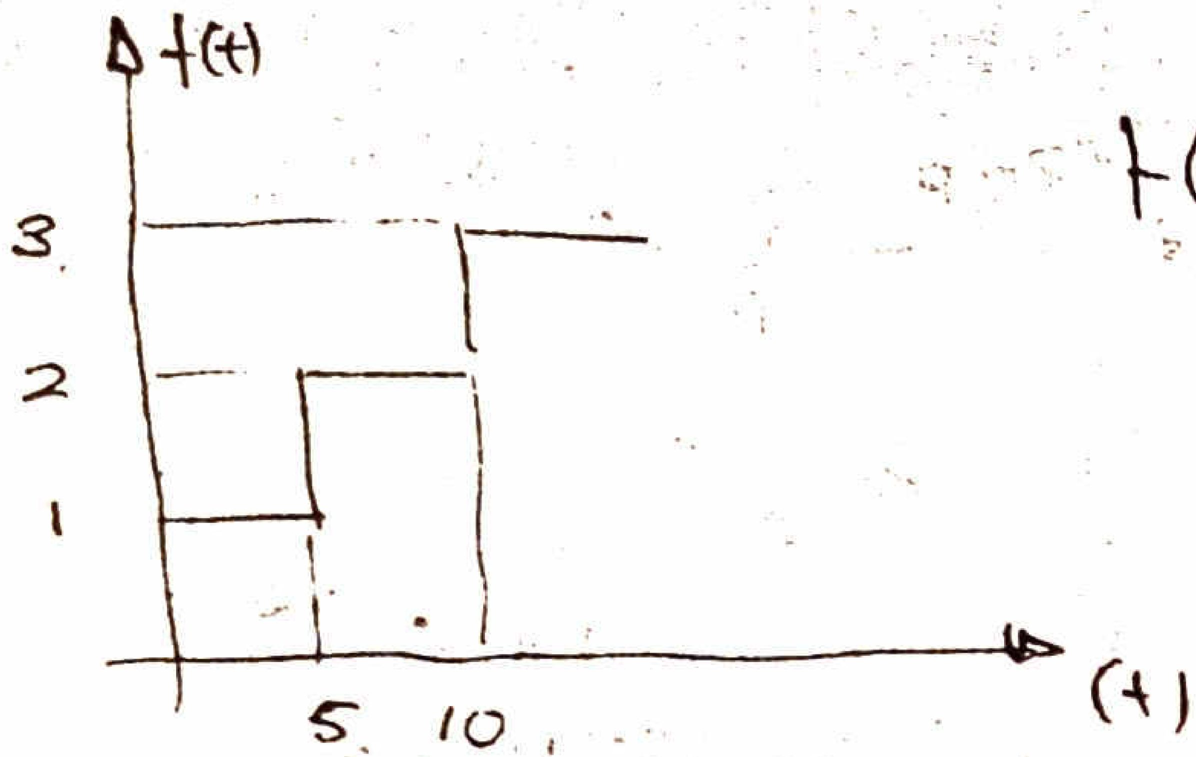
$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi a}{p^2a^2+\pi^2}$ ... $\sum_{n=0}$ ← razón $= e^{-r}$
primer termino $= 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nap} = \frac{1}{1-e^{-ap}}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{\pi a}{p^2a^2+\pi^2}\left[1+e^{-ap}\right]\frac{1}{1-e^{-ap}} = \boxed{\frac{\pi a}{p^2a^2+\pi^2}\,\text{cth}\,\frac{ap}{2}}$$

---o0o---

Hallar la transformada de $f(t) = E\left(1+\frac{t}{5}\right)$
← quiere decir parte entera



$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(t-n5)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n5p}\,\mathcal{L}[\mu(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n5p}\frac{1}{p}$$

TRANSFORMADA INVERSA

$$F(p) = \frac{(p+2)}{(p+3)^2(p+1)(p^2+2p+3)}$$

se descompone en fracciones simples (parcial)
polo → $f(p) = \infty$
cero → $f(p) = 0$

$p = \sigma + j\omega$

para $p=-3$ hay un polo de orden 2, para $p=-1$ tenemos otro polo y para las raices de p^2+2p+3 tendríamos otros dos polos
para $p=-2$ tenemos un cero

$$\frac{p+2}{(p+3)^2(p+1)\underbrace{(p^2+2p+3)}_{(p+r_1)(p+r_2)}} = \frac{A}{(p+3)^2}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{p+1}+\frac{Dp+E}{p^2+2p+3}$$

Para calcular A multiplicamos por $(p+3)^2$

$$\frac{p+2}{(p+1)(p^2+2p+3)} = A + B(p+3) + C\frac{(p+3)^2}{p+1} + \frac{(Dp+E)(p+3)^2}{p^2+2p+3}$$

hacemos $p=-3$

$$\frac{-1}{(-2)(6)} = \boxed{\frac{1}{12} = A}$$

$$\frac{d}{dp}\left[(p+3)^2F(p)\right]_{p=-3} = B + \frac{2C(p+3)(p+1)-C(p+3)^2}{(p+1)^2} + 2p+3$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(p+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-A\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+3}\right)\right] = A t e^{-3t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{p+3}\right] = Be^{-3t}$$

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{dF(p)}{dp}$$

si tuviesemos $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)^5}\right]$

Haríamos ..

$$\frac{d^4}{dp^4}\left(\frac{1}{p+3}\right) = t^4 e^{-3t}$$

Para hallar c multiplicariamos por p+1

$$c = [(p+1)F(p)]_{p=-1}$$

Para calcular D y E ya no nos valen.

OTRO EJEMPLO

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2+2p+3)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+c}{p^2+2p+3}$$

$$A = [(p+2)F(p)] = \left(\frac{1}{p^2+2p+3}\right)_{p=-2} = \frac{1}{3}$$

$$F(p) = \frac{1}{3(p+2)} + \frac{Bp+c}{p^2+2p+3}$$

De modo que:

$$\frac{Bp+c}{p^2+2p+3} = \frac{1}{(p+2)(p^2+2p+3)} - \frac{1}{3(p+2)} =$$

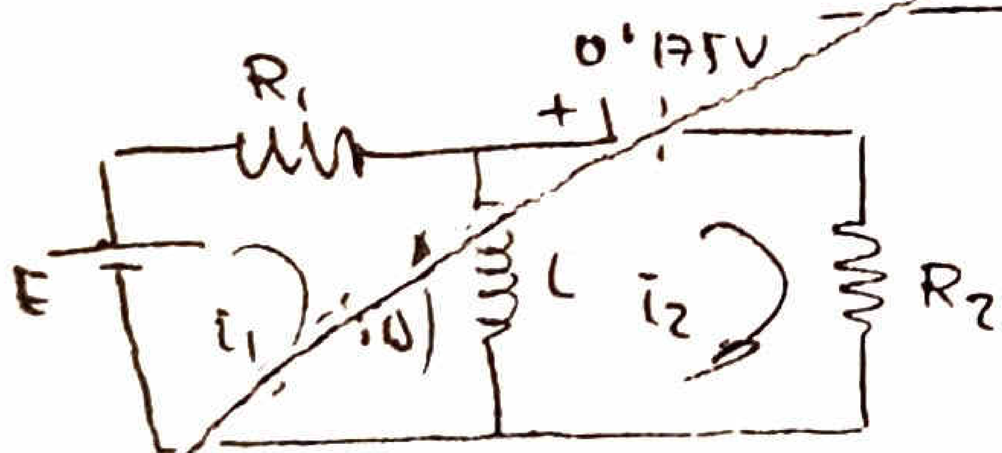
$$= \frac{3-p^2-2p-3}{3(p+2)(p^2+2p+3)} = \frac{-p(p+2)}{3(p+2)(p^2+2p+3)}$$

comparando terminos $B = -\frac{1}{3}$ y $c = 0$

$$\frac{1}{p^2+2p+3} = \frac{1}{(p+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$$

↑ en las tablas viene así.

PROBLEMA



calcular i_2

$$E = (R_1+LD)i_1 - LD\,i_2$$

$$0 = -LD\,i_1 + \left(LD + \frac{1}{CD} + R_2\right)i_2$$

vamos a transformar todos los terminos por laplace.

Con las mayusculas indicamos las transformadas

$$\frac{E}{p} = R_1 I_1 + L(pI_1 + i_1(0)) = -L(pI_2 - i_2(0)]$$

$$0 = -L[pI_1 - i_1(0)] + L[pI_2 - i_2(0)] + \frac{1}{C}\left[\frac{I_2}{p} + \frac{(D^{-1}i_2)_0}{p}\right] + R_2 I_2$$

Cogemos de las ecuaciones los términos que incluyan las condiciones iniciales ya que son conocidas

1ª ec. $-Li_1(0) + Li_2(0) = L(i_2 - i_1)_0 = 0'5L$

intensidad por la bobina en t=0

2ª ecuacion $Li_1(0) - Li_2(0) = L(i_1 - i_2)_0 = -0'5L$

$$\frac{1}{C}(D^{-1}i_2)_0 = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{t} i_2 dt\right]_0 = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i_2\,dt = 0'175V$$

Con esto las ecuaciones diferenciales por laplace.

Serían ... los

$$\frac{E}{p} - 0'5L = (R_1 + Lp) I_1 - Lp I_2$$

$$0'5L - \frac{0'175}{p} = -Lp I_1 + \left(Lp + \frac{1}{Cp} + R_2\right) I_2$$

ponemos el signo porque las columnas tenian que n cambiadas

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{E}{p} - 0'5L & R_1 + Lp \\ 0'5L - \frac{0'175}{p} & -Lp \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Lp & Lp \\ -Lp & Lp + \frac{1}{Cp} + R_2 \end{vmatrix}} = \frac{(R_1+Lp)\left(0'5L - \frac{0'175}{p}\right) + \left(\frac{E}{p} - 0'5L\right) Lp}{R_1 Lp + \frac{R_1}{Cp} + R_1 R_2 + \frac{L}{C} + L R_2 p} =$$

multiplicando por Cp

$$= \frac{(R_1+Lp)(0'5LCp - 0'175C) + (EC - 0'5LCp)Lp}{R_1 CLp^2 + R_1 + R_1 R_2 Cp + Lp + R_2 LCp^2}$$

como $R_1 = R_2 = 1\Omega$ $L = 2H$ $C = 2F$ $E = \mu(t)$

$$I_2 = \frac{5'3p - 0'35}{8p^2 + 4p + 1} = \frac{p + \alpha}{(p+a)^2 + b^2}$$ vamos a ponerlo de esta forma

$$I_2 = \frac{5'3}{8} \frac{p - \frac{0'35}{5'3}}{p^2 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{8}} = \frac{5'3}{8} \frac{p - \frac{0'35}{5'3}}{\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

como la antitansformada de $\frac{p+\alpha}{(p+a)^2 + b^2}$ es $A e^{-at} \operatorname{sen}(bt + \psi)$

ψ y A dependen de a, b y α

luego en nuestro caso $\psi = tg^{-1} \frac{b}{\alpha - a}$

$$I_2 = A e^{-\frac{1}{4}t} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}t + \psi\right)$$

A veces nos pediran solo el valor de la salida de corriente en regimen permanente para lo cual no hace falta hallar la antitansformada, sino que se halla por el teorema del valor final que dice que si:

$$F(p) \longrightarrow \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p F(p)$$

valor en regimen permanente.

EJEMPLO DE TRANSFORMADA PARA UNA EXCITACION DIFICIL

Partimos de una ecuación diferencial del tipo

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-t} \mu(t-2)$$

las condiciones iniciales pueden ser.

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p-a)$

$\mathcal{L}[f(t-a)\mu(t-a)] = e^{-ap} F(p)$

Según la primera

$$\mathcal{L}[e^{-t}\mu(t-2)] = \mathcal{L}[\mu(t-2)]_{p\to p+1} = \left[\frac{e^{-2p}}{p}\right]_{p\to p+1} = \frac{e^{-2(p+1)}}{p+1}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales y el valor de $\mathcal{L}[e^{-t}\mu(t-2)]$ y operando $[p^2+3p+2]y = \frac{e^{-2(p+1)}}{p+1} + p+3$

$$y = \frac{e^{-2(p+1)}}{(p+1)(p^2+3p+2)} + \frac{p+3}{p^2+3p+2}$$

Calculamos ahora las antitransformadas de cada sumando

$$\frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} A = 2 \\ B = -1 \end{matrix}$$

Por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+3}{p^2+3p+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2(p+1)}}{(p+1)(p+2)(p+1)}\right] = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)}\right] \quad (N)$$

Para ver que esto es verdad basta aplicar transformadas y $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(p-a)$ llamando $f(t)$ a $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2p}}{p^2(p+1)}\right]$

Aplicamos ahora en N

$\mathcal{L}[f(t-a)\mu(t-a)] = \mathcal{L}^{-1}[e^{-ap}F(p)]$

con lo cual

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2(p+1)}}{(p+1)(p+2)(p+1)}\right] = e^{-t}\mu(t-2)\,\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right]}_{t' = t-2}$$

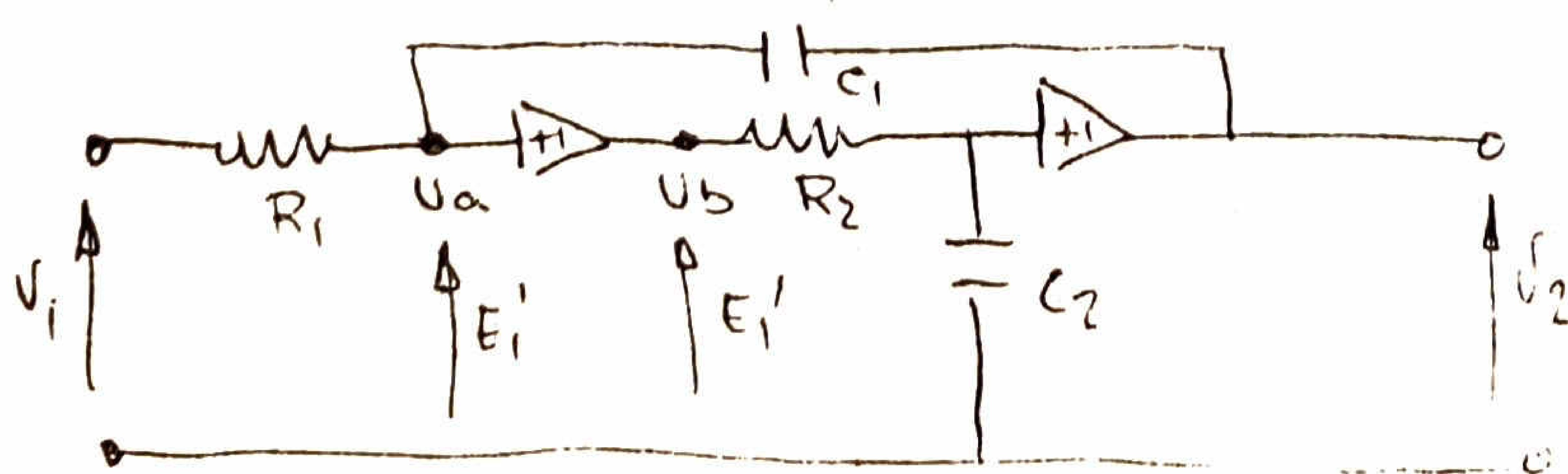
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}[t - 1 + e^{-t}]$$ pero va desplazada ya que iba multiplicada por e^{-2p}

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2(p+1)}}{(p+1)(p+2)(p+1)}\right] e^{-t}\mu(t-2)\left[(t-2) - 1 + e^{-(t+2)}\right]$$

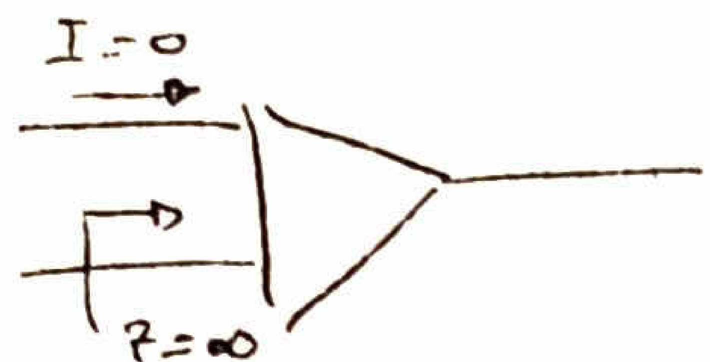
La solución sería la suma de las dos halladas.

AMPLIFICADOR OPERACIONAL



En R_2 no hay caída de tensión ya que al ser la impedancia de entrada ∞ no hay paso de corriente

· los condensadores están inicialmente descargados.



Tiene impedancia de entrada infinita y baja impedancia de salida.

Ganancia = +1 con lo cual $V_a = V_b$

la función de transferencia es el cociente entre $\mathcal{L}[U_1]$ y $\mathcal{L}[U_2]$ → función de transferencia $= \dfrac{\mathcal{L}[U_2]}{\mathcal{L}[U_1]}$

$$0 = -\frac{1}{R_1} U_1 + \left(\frac{1}{R_1} + C_1 D\right) E_1' - C D U_2$$

$$0 = -\frac{1}{R_2} E_1' + \left(\frac{1}{R_2} + C_2 D\right) U_2$$

Aplicamos transformadas

$$0 = -\frac{1}{R_1}(U_1) + \left(\frac{1}{R_1} + C_1 p\right) E_1' - C_1 p (U_2)$$

(U_1) y (U_2) son ya transformadas.

$$0 = -\frac{1}{R_2} E_1' + \left(\frac{1}{R_2} + C_2 p\right)(U_2)$$

$$(U_2) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + C_1 p & \frac{(U_1)}{R_1} \\ -\frac{1}{R_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} + C_1 p & -C_1 p \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + C_2 p \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(U_1)}{R_1 R_2}}{\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{C_2 p}{R_1} + \frac{C_1 p}{R_2} + C_1 C_2 p^2 - \frac{C_1 p}{R_2}}$$

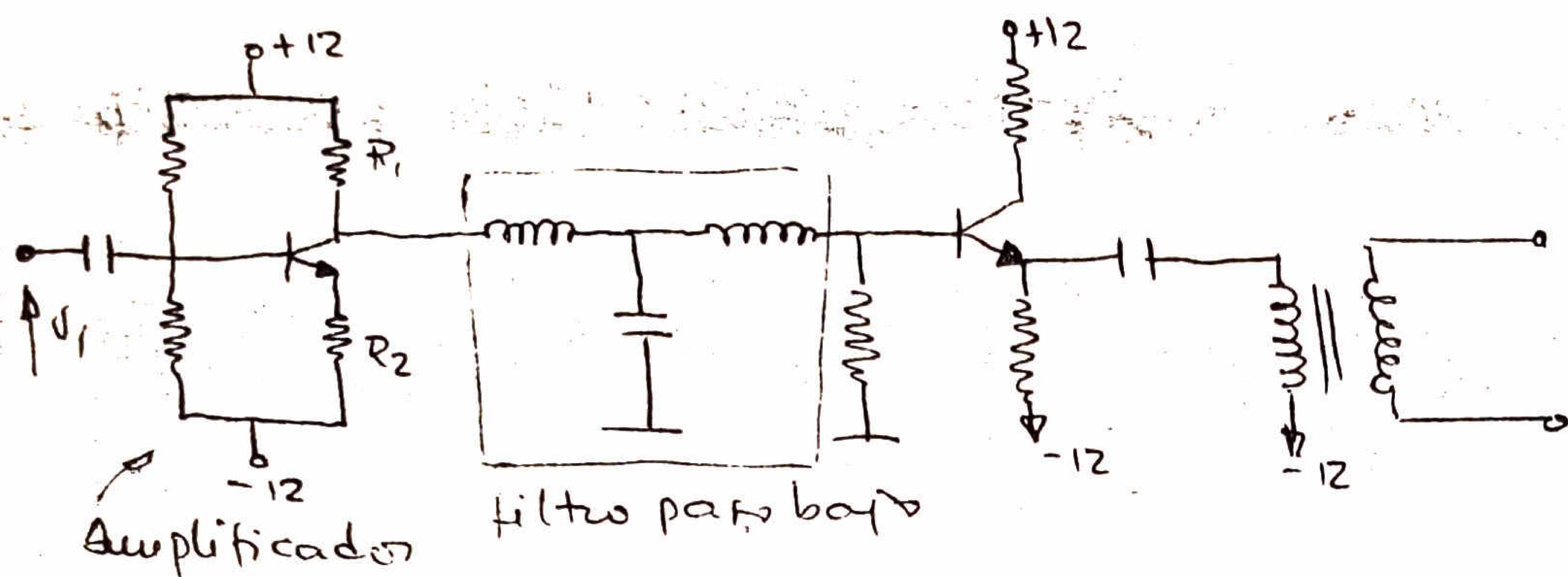
$$(U_2) = \frac{(U_1)}{1 + R_2 C_2 p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}$$

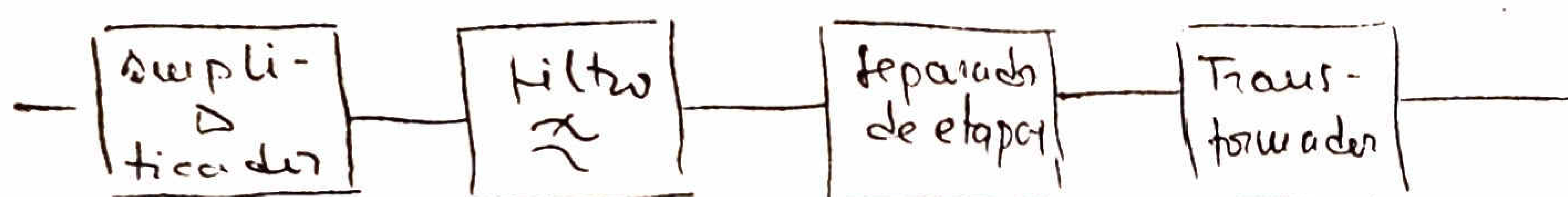
$$\text{función de transferencia} = \frac{(U_2)}{(U_1)} = \frac{1}{1 + R_2 C_2 p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2} =$$

$$= \frac{1/R_1 R_2 C_1 C_2}{p^2 + \frac{1}{C_1 R_1} p + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} = \frac{\omega_1 \omega_2}{p^2 + \omega_1 p + \omega_1 \omega_2}$$

siendo $\dfrac{1}{C_1 R_1} = \omega_1$ $\quad \dfrac{1}{R_2 C_2} = \omega_2$

DIAGRAMAS FUNCIONALES " DE BLOQUES





Habría que dar las características de cada bloque según cual fuese su función.

El que diseña los bloques también nos debe dar la función de transferencia.

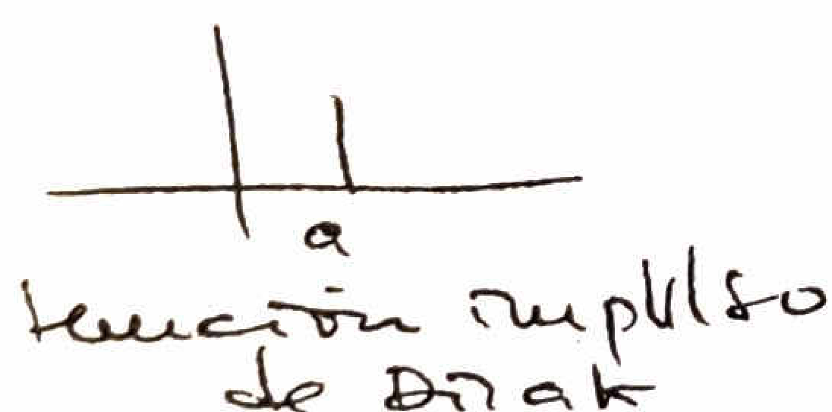
FUNCION DE TRANSFERENCIA (Examen)



Se define como la transformada de laplace de la señal de salida dividida por la transformada de laplace de la señal de entrada, considerando condiciones iniciales nulas.

$$G_p = \frac{\mathcal{L}[V_2(t)]}{\mathcal{L}[V_1(t)]}$$

Si la señal de entrada es la función impulso de Dirak la función de transferencia es igual a la transformada de laplace de la señal de salida

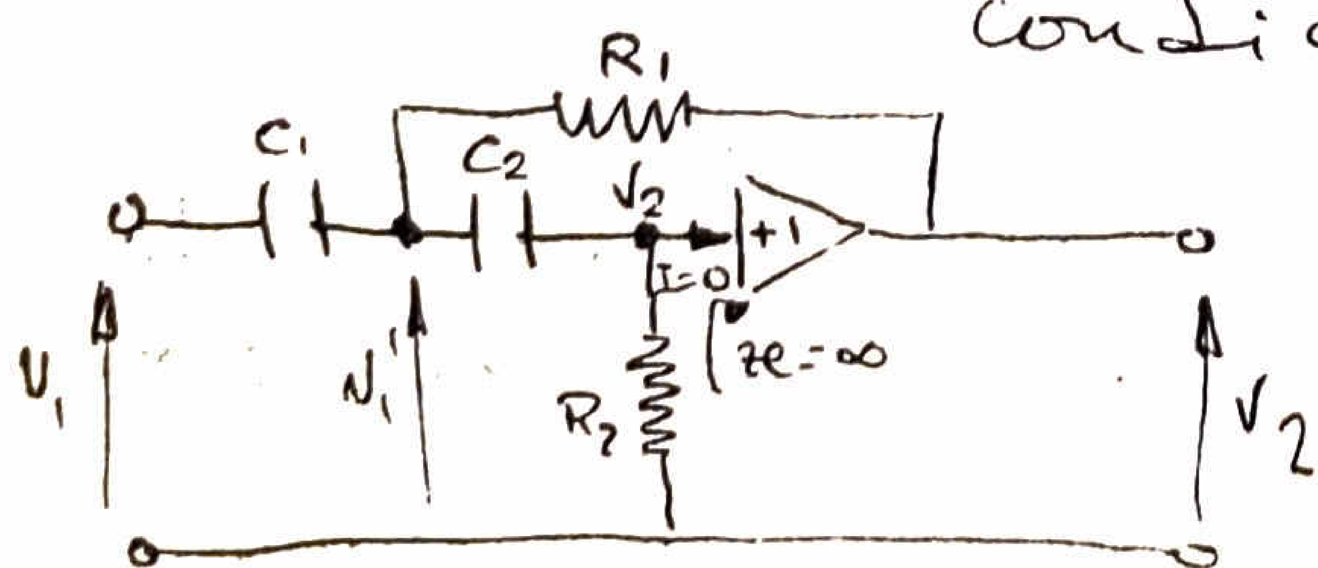


$$G(p) = \frac{\mathcal{L}[V_2(t)]}{\mathcal{L}[V_1(t)]} = \frac{\mathcal{L}[V_2(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \mathcal{L}[V_2(t)]$$

(con $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$)

EJEMPLO

- Hallar la función de transferencia. Condiciones iniciales nulas



$$0 = -C_1 D V_1 + \left(C_1 D + C_2 D + \frac{1}{R}\right) V_1' - C_2 D V_2 \quad (\text{nudo } V_1')$$

$$0 = -C_2 D V_1' + \left(\frac{1}{R_2} + C_2 D\right) V_2$$

Para pasar a transformadas con condiciones iniciales nulas basta cambiar la D por la p.

$$\begin{cases} 0 = -C_1 p V_1(p) + \left[C_1 p + C_2 p + \frac{1}{R_1}\right] V_1' - C_2 p V_2 \\ 0 = -C_2 p V_1' + \left(\frac{1}{R_2} + C_2 p\right) V_2 \end{cases}$$

$$U_2(p) = \frac{\begin{vmatrix} (C_1+C_2)p + \frac{1}{R_1} & C_1 p V_1 \\ -C_2 p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (C_1+C_2)p + \frac{1}{R_1} & -C_2 p \\ -C_2 p & \frac{1}{R_2} + C_2 p \end{vmatrix}} = \frac{C_1 C_2 p^2 V_1(p)}{\frac{C_1 p}{R_2} + \frac{C_2 p}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2} + C_1 C_2 p^2 + C_2^2 p^2 + \frac{1}{R_1} C_2 p - C_2^2 p^2}$$

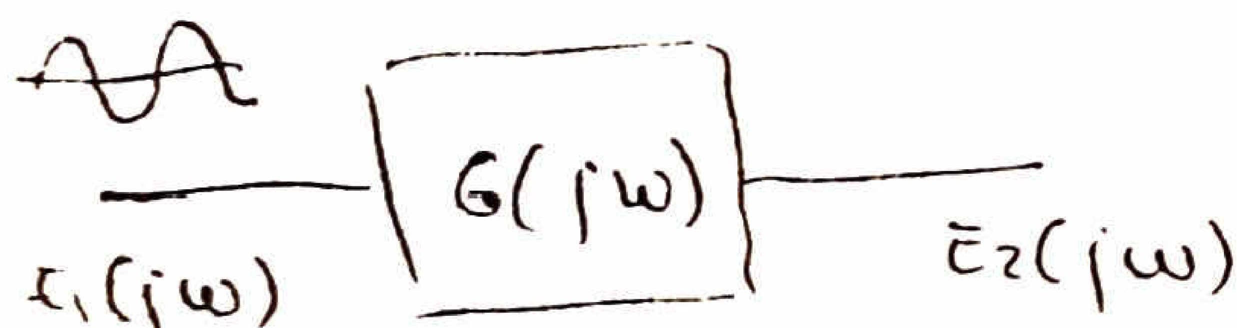
$$\frac{U_2(p)}{V_1(p)} = G(p) = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)p + 1} =$$

$$= \frac{p^2}{p^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1}\right)}_{\Delta} p + \underbrace{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}_{\omega_u^2}}$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA ESPECTRAL.

Se define como la relación que hay entre el fasor de salida y el fasor de entrada con funciones senoidales y régimen permanente

se halla hallando la función de transferencia general en p y sustituyendo la p por $j\omega$



$$G(j\omega) = G = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + \Delta j\omega + \omega_u^2} = \frac{-\omega^2 \,(180^\circ)}{\sqrt{(\omega_u^2 - \omega^2)^2 + \Delta^2 \omega^2}} \quad \underline{|180 - \varphi}$$

$\operatorname{tg} \varphi$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_u^2 - \omega^2)^2 + \Delta^2 \omega^2}} \quad \underline{|180 - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Delta\omega}{\omega_u^2 - \omega^2}}$$

Sirve para si a la entrada dan senos del:

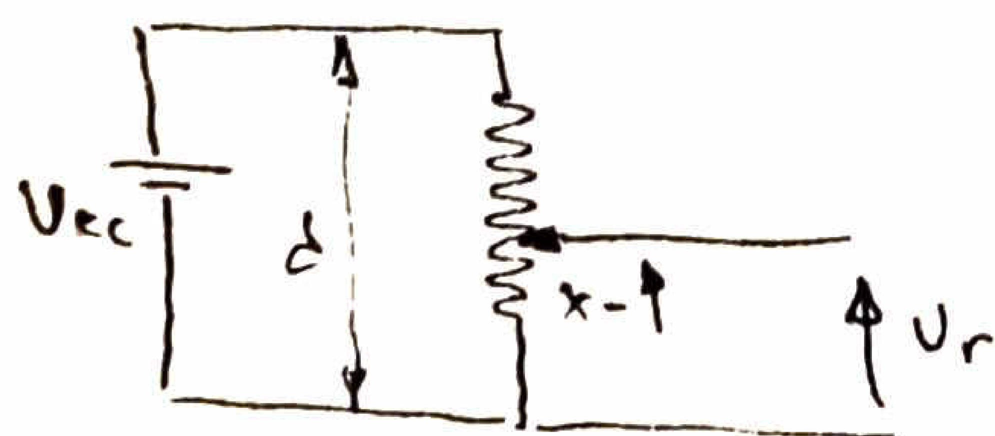
$\omega \to 0$ — $|G(j\omega)| = 0$ → las bajas frecuencias no pasan

$\omega \to \infty$ — $|G(j\omega)| = 1$ → las altas frecuencias pasan

luego es un filtro paso alto.

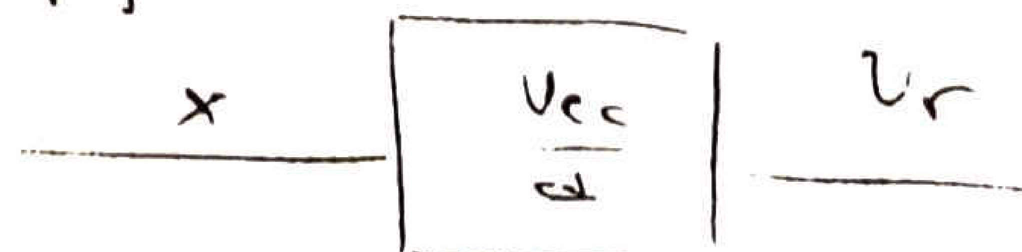
EJEMPLO:

Tenemos un potenciómetro, el cual hace que variaciones longitudinales se conviertan en tensiones. Hallar la función de transferencia



$$\frac{V_{cc}}{d} x = V_r$$

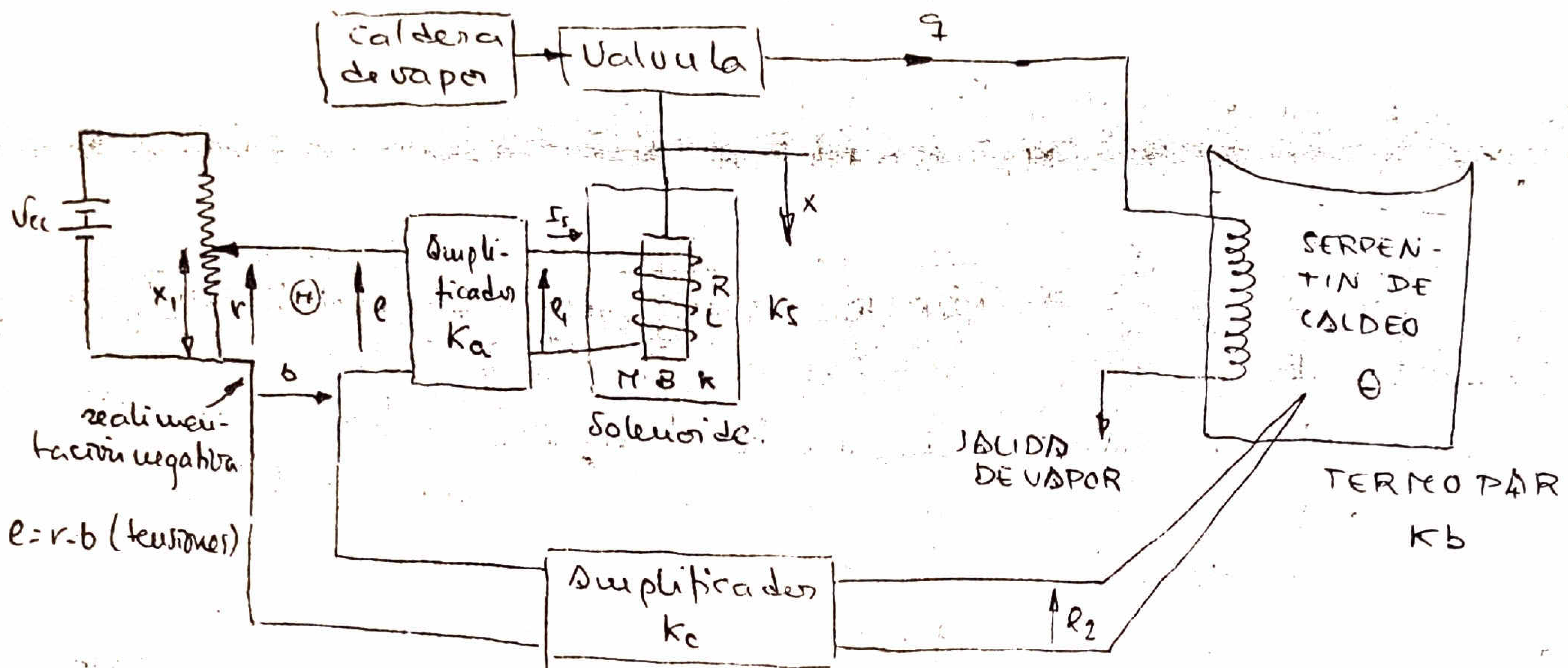
$$\frac{V_{cc}}{d} \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[V_r]$$



↖ función de transferencia

SERVOSISTEMA PRACTICO

Vamos a establecer su DIAGRAMA DE BODE



(M) elemento comparador o detector de error (nos da la diferencia entre las tensiones)

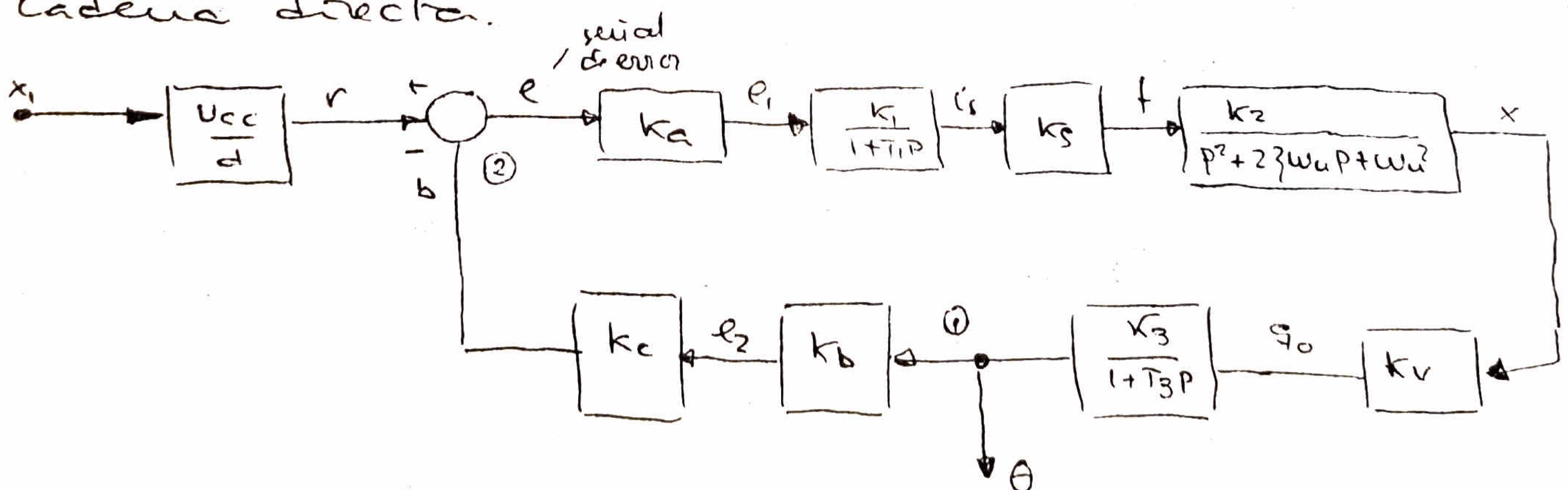
Si aumenta la temperatura el termopar crea una corriente y un potencial en b que hace que e disminuya lo que a su vez hace que disminuya I_s por lo que la valvula se cerrará y el paso de calor q disminuye por lo que disminuye la ~~tempera~~ temperatura y volvemos al equilibrio.

DIAGRAMA DE BLOQUES.

Vamos a poner bloques siempre que la magnitud fisica cambie de valor, o bien cuando pasemos de tensión mecanica a electrica por ejemplo.

En cada bloque pondremos una función de transferencia.

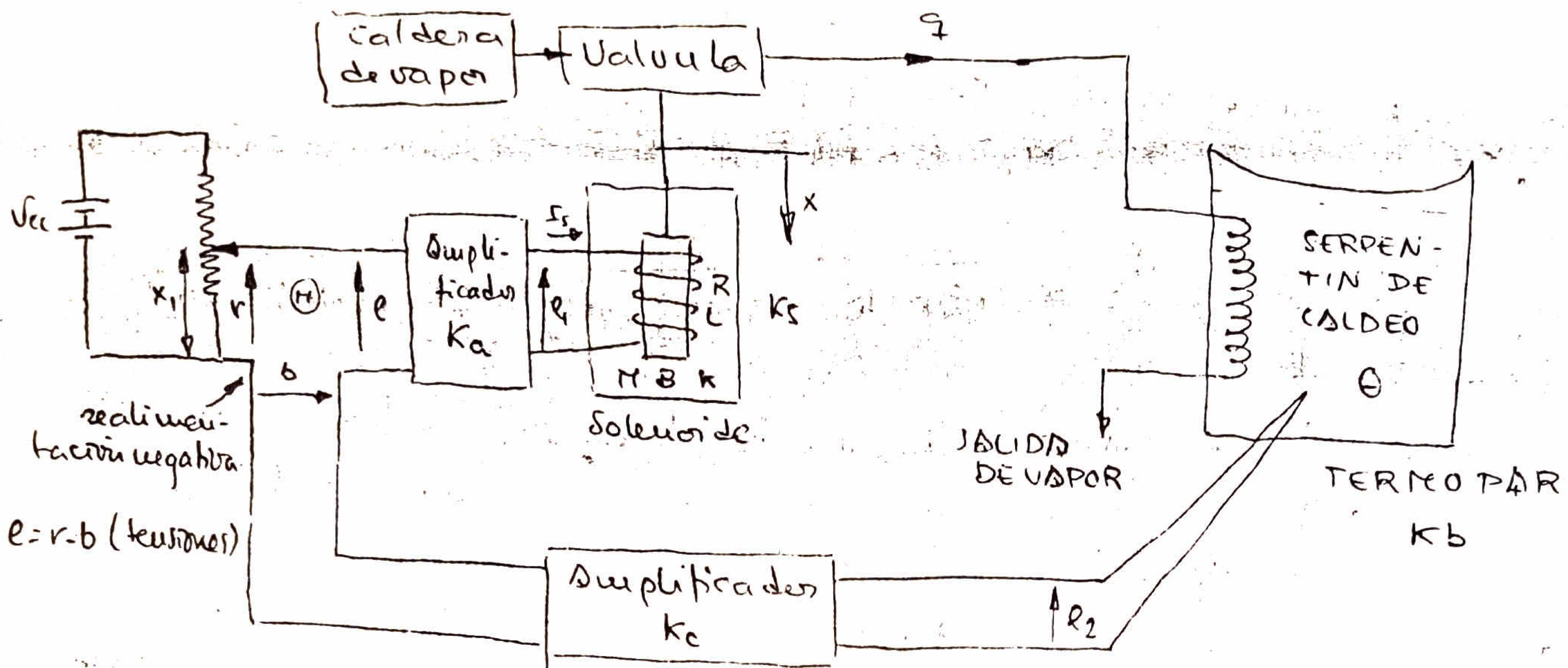
Cadena directa.



$\frac{i_s}{e_1} = \frac{1}{R+Lp}$: (función de transferencia del bloque por el cual pasamos de tensiones a corrientes)

$$= \frac{1/R}{1+\frac{L}{R}p} = \frac{K_1}{1+T_1 p}$$

Vamos a establecer su DIAGRAMA DE BODE



(M) elemento comparador o detector de error (nos dá la diferencia entre las tensiones)

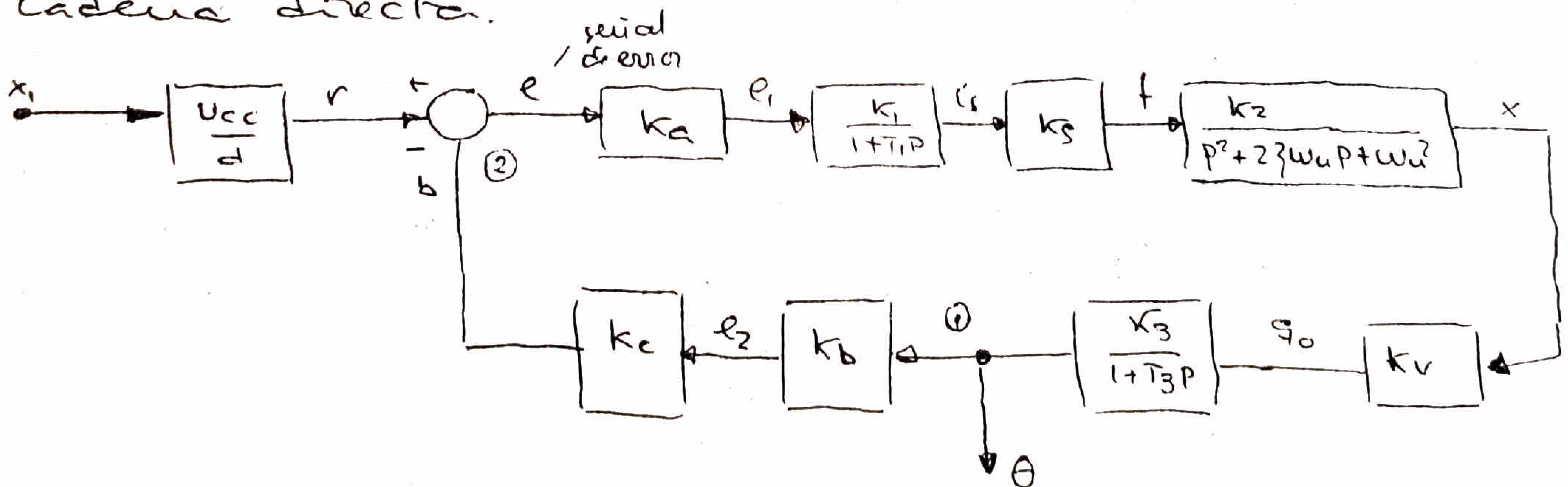
Si aumenta la temperatura el termopar crea una corriente y un potencial en b que hace que e disminuya lo que a su vez hace que disminuya I_s por lo que la valvula se cerrará y el paso de calor q disminuye por lo que disminuye la ~~temperatura~~ temperatura y volvemos al equilibrio.

DIAGRAMA DE BLOQUES.

Vamos a poner bloques siempre que la magnitud física cambie de valor, o bien cuando pasemos de tensión mecanica a electrica por ejemplo.

En cada bloque pondremos una función de transferencia.

Cadena directa.

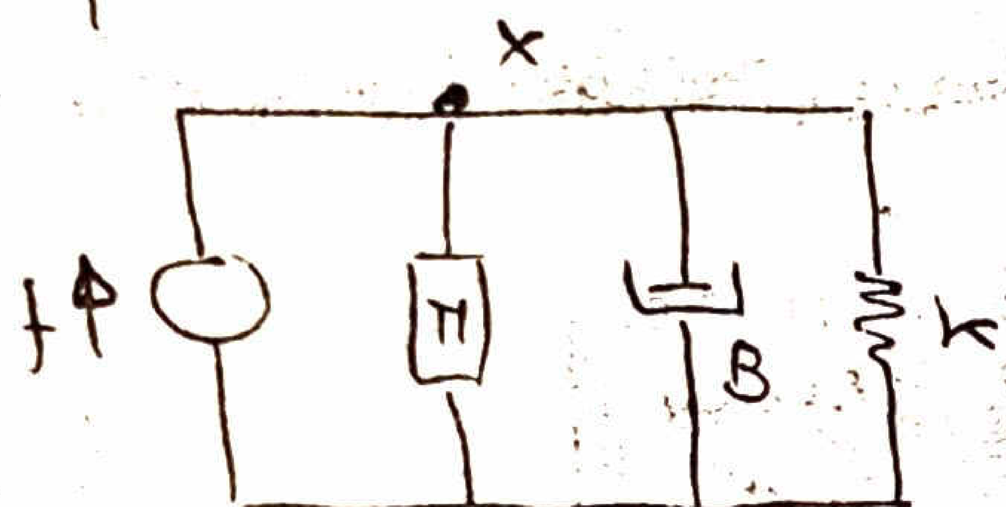


$$\frac{i_s}{e_1} = \frac{1}{R+LP} :$$ (función de transferencia del bloque por el cual pasamos de tensiones a corrientes)

$$= \frac{1/R}{1+\frac{LP}{R}} = \frac{K_1}{1+T_1P}$$

... se produce una fuerza

$f = K_s i_s \Rightarrow$ (esta fuerza provoca que el bloque del solenoide descienda una distancia x) luego esta fuerza se emplea en vencer el rozamiento, el peso y la fuerza elastica.



$$f = (Mp^2 + Bp + k)x$$

$$\frac{x}{f} = \frac{1}{Mp^2+Bp+k} = \frac{\frac{1}{M}}{p^2+\frac{B}{M}p+\frac{k}{M}} = \frac{K_2}{p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2}$$

Al producir el desplazamiento hacia abajo x la valvula se abre o se cierra provocando una salida más o menor grande de calor.

$q = f(P_c, x)$ P_c = Presión de la caldera. Si lo hacemos constante tenemos una funcion lineal

$$\Delta q = \frac{\partial f}{\partial P_c}\Delta P_c + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$$

se desprecia por haberla hecho constante // $K_v = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$

$$\boxed{q = K_v x}$$

El liquido a la subida de la temperatura es una exponencial y se comporta como un integrador (Depende de como esté construido el serpentin)

$\theta = K_c \frac{q}{D+a}$ → cte de tiempo, depende del serpentin

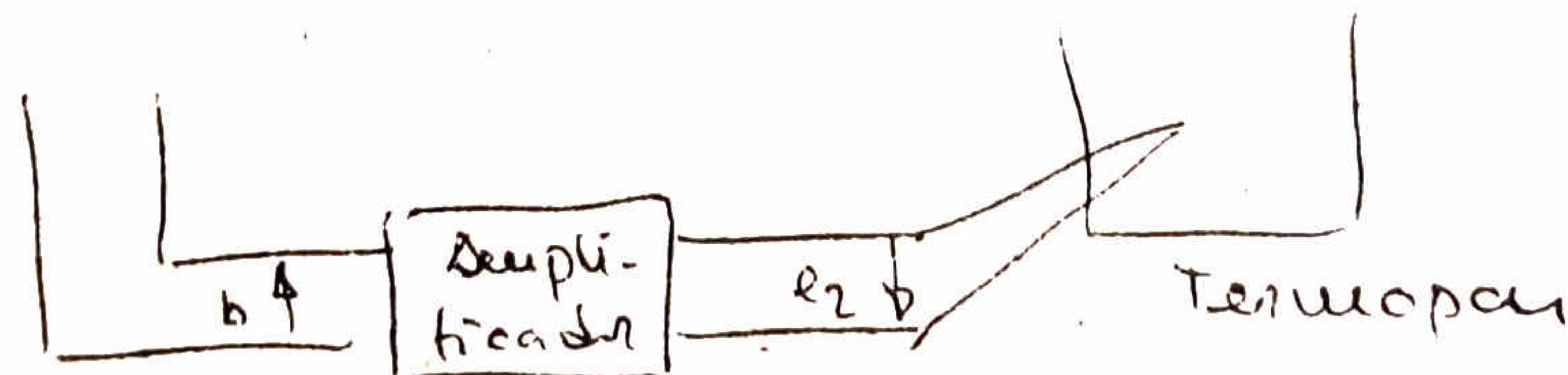
↑ temperatura del tanque

$\theta = K_c \frac{q}{p+a}$

$\frac{\theta}{q} = \frac{K_c}{p+a} =$ funcion de transferencia

$$= \frac{K_c/a}{1+\frac{p}{a}} = \frac{K_3}{1+T_3 p}$$

Cadena directa es aquella que partiendo de la variable de ingreso pasamos a la de salida en linea recta



El amplificador es de una etapa y nos invierte la polaridad

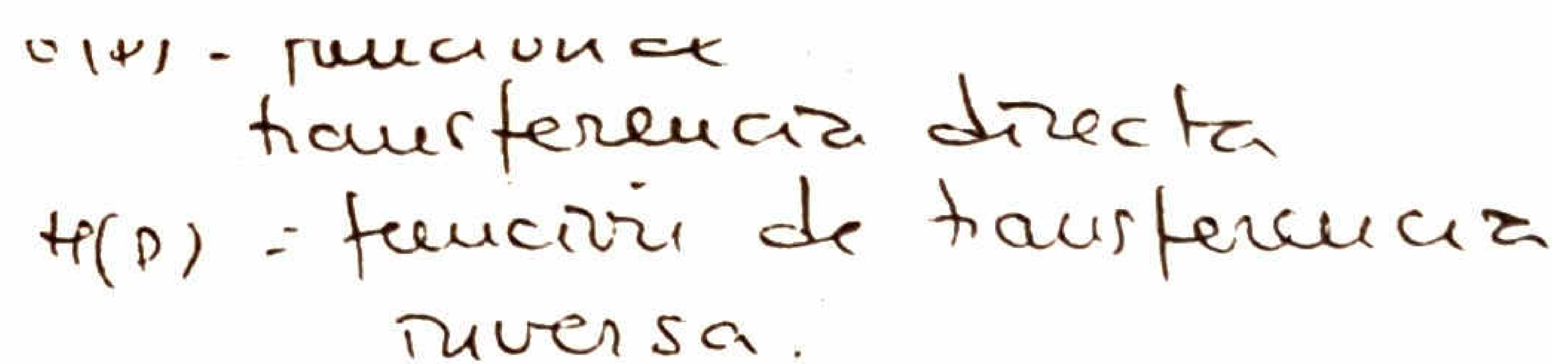
$e_2 = K_b \theta$

$b = K_c e_2$

Cadena de reacción primaria o derealimentación, es la que realimenta directamente la señal de entrada con la de salida (En el circuito va desde ① hasta ② por el camino corto)

Un servosistema tiene que quedar reducido a:

r + e G(p) c
b
reali-
mentación
negativa
H(p)


G(p) - función de
transferencia directa
H(p) - función de transferencia
inversa.

c: variable de salida controlada
b: señal realimentada

+ realimentación positiva.

Cuando tenemos elementos en cascada la función de transferencia total es igual al producto de las funciones de transferencia de cada uno.

a G₁ b G₂ c   a G₁G₂ c

$b = a G_1$
$c = b G_2$ → $C = a G_1 G_2$

REDUCCION DE UN SISTEMA.

R(p) E(p) G(p) C(p)
B(p) B A
H(p)

R(p) = señal de entrada de referencia.
E(p) señal de error.

Función de transferencia de la cadena directa

$$G(p) = \frac{C}{E}$$

Función de transferencia de la cadena inversa

$$H(p) = \frac{B}{C}$$

Función de transferencia en lazo abierto (AB en circuito abierto)

$$GH = \frac{B}{E}$$

Función de transferencia general del sistema

$C = GE = G(R-B) = G(R-CH)$

$E = R - B$

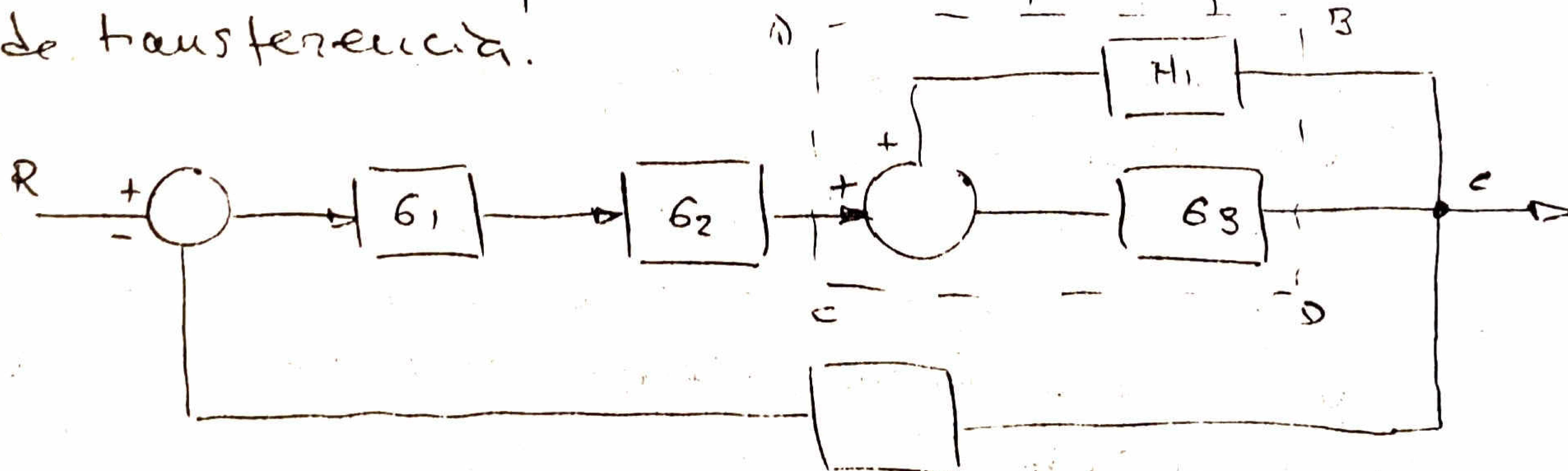
$B = CH$

$C(1+GH) = GR$

$$\boxed{\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}}$$

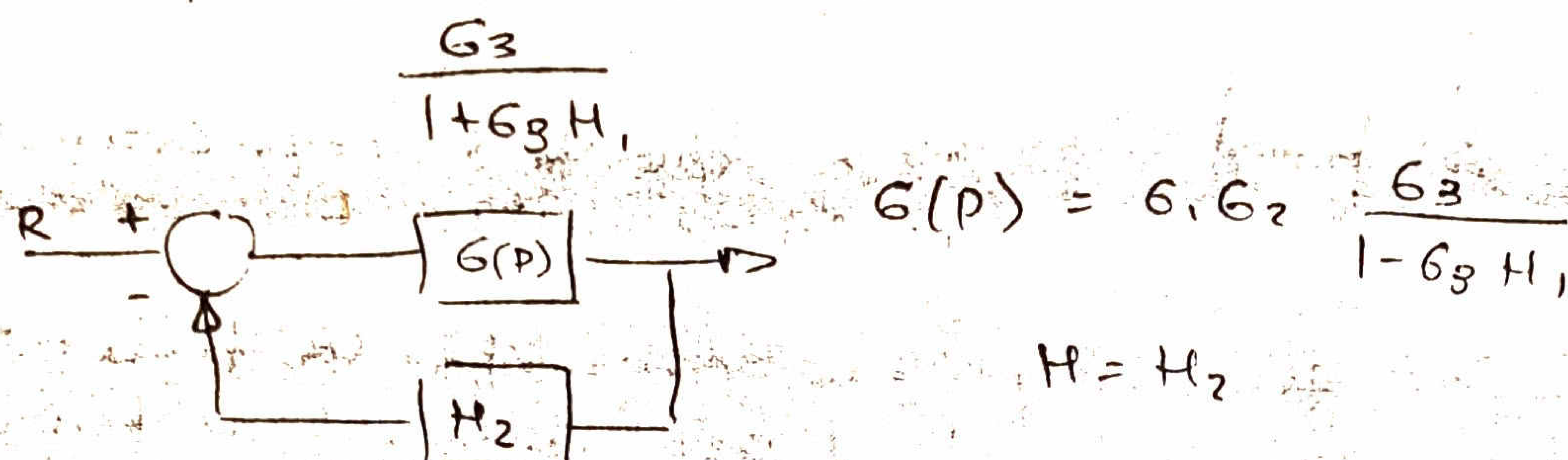
+ si la realimentación es negativa
− si " " es positiva.

Reducir el diagrama de bloques y hallar sus funciones de transferencia.



El sistema realimentado secundario DBCD equivale a un bloque que tiene una función de transferencia

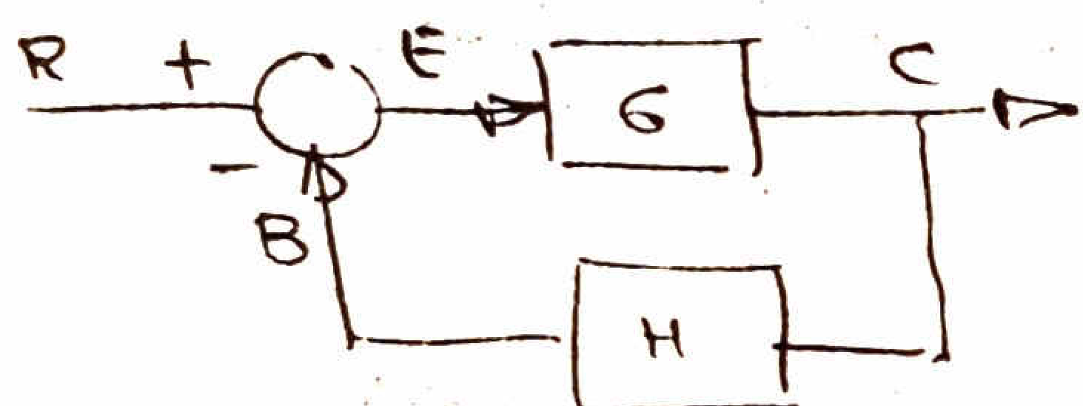
$$\frac{G_3}{1+G_3 H_1}$$



la función de transferencia general sería

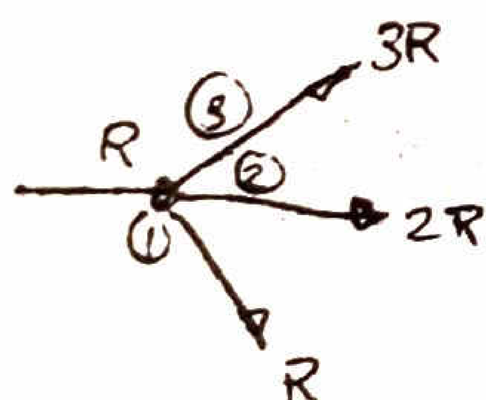
$$A = \frac{G_1 G_2 \dfrac{G_3}{1-G_3 H_1}}{1 + \dfrac{G_1 G_2 G_3}{1-G_3 H_1} H_2}$$

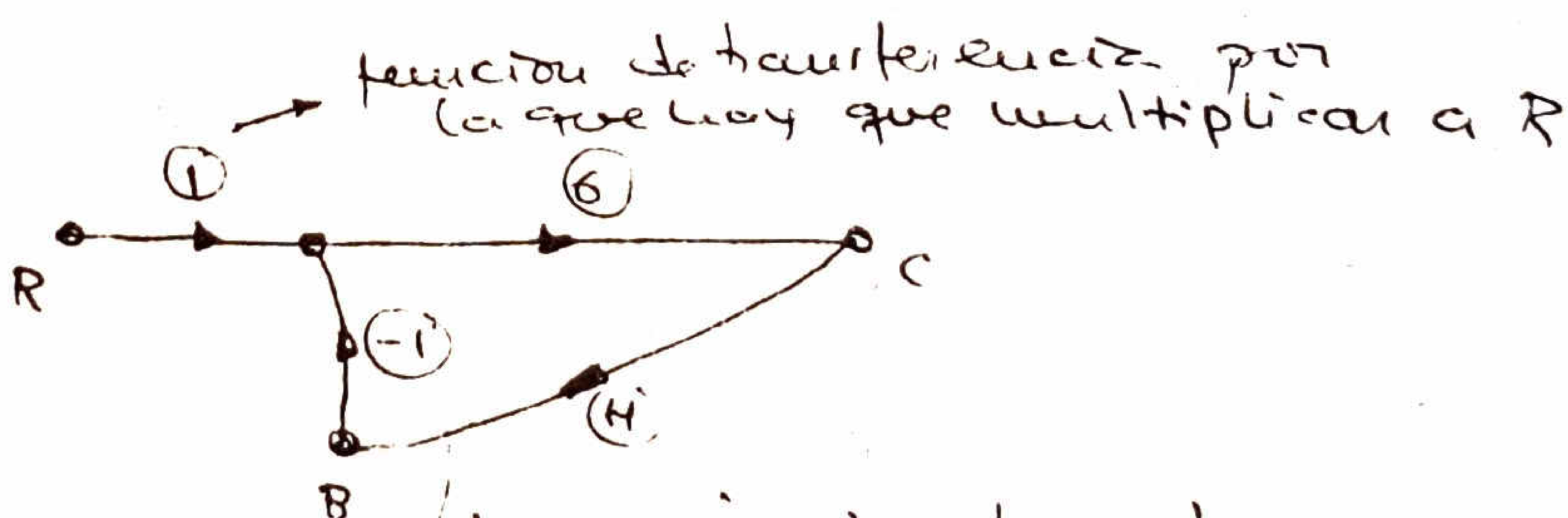
OTRO METODO: DIAGRAMA DE FLUJOS (FLUJOGRAMAS)



Simplificación de los diagramas de bloques.
El diagrama de flujos trata de dibujar un árbol con una serie de nudos y ramas.

Los nudos suman todas las señales que le llegan y transmiten todo el valor por cada una de las ramas que de él parten. Cada variable es un nudo.





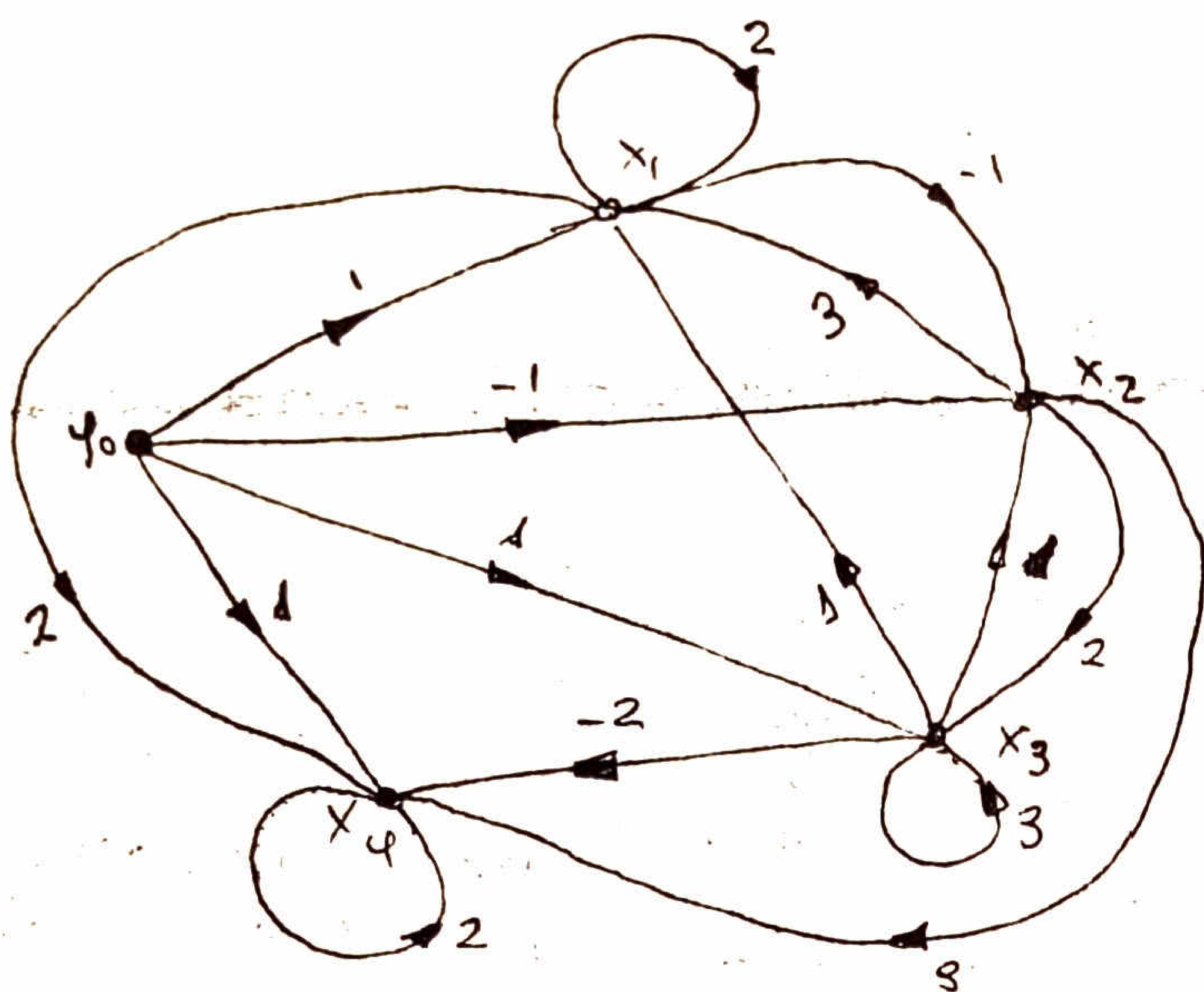
El sentido de la flecha va de causa a efecto.

Resolver el sistema mediante el diagrama de flujos.

(1) Establecer el diagrama de flujos.

$$\begin{cases} x_1 = y_0 + 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ x_2 = -y_0 + x_3 - x_1 \\ x_3 = y_0 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_4 = y_0 + 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Tendremos 5 nudos ya que hay cuatro variables dependientes y una independiente.
y_0 es la variable independiente de ella las flechas solo salen. (Nudos fuente, todas las ramas salen).
Los demás nudos son dependientes y entran y salen ramas (nudos mixtos)



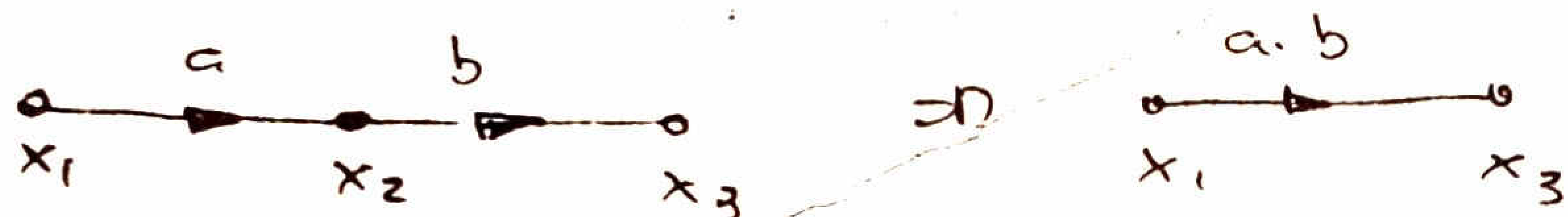
Nos piden hallar x_2 en función de y_0



Hay dos métodos:

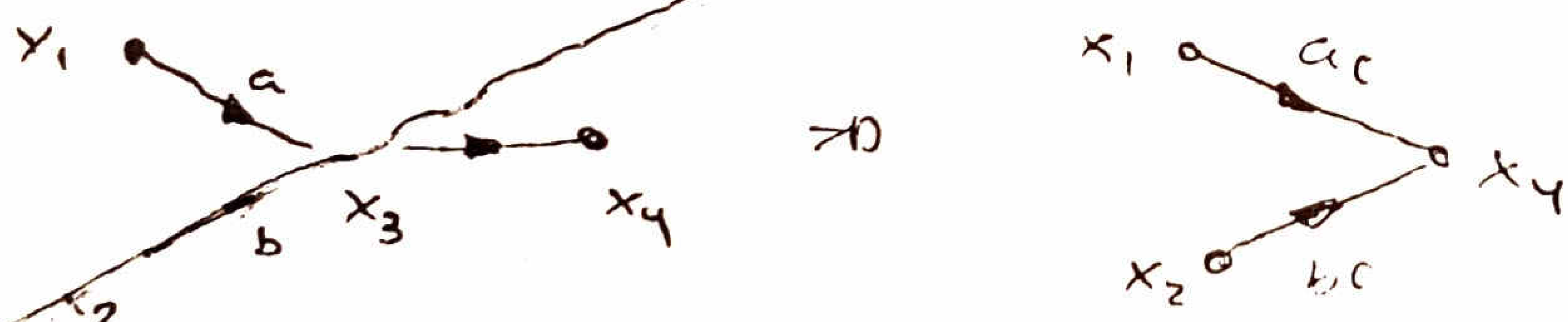
1) <u>MÉTODO DE DISTENSIÓN DE NUDOS</u>

Propiedades



Las flechas han de estar orientadas en el mismo sentido.





Trayecto directo entre dos variables son todos los posibles caminos que hay que recorrer para ir de una variable a otra siempre en el sentido de la flecha sin pasar dos veces por el mismo vértice (nudo)

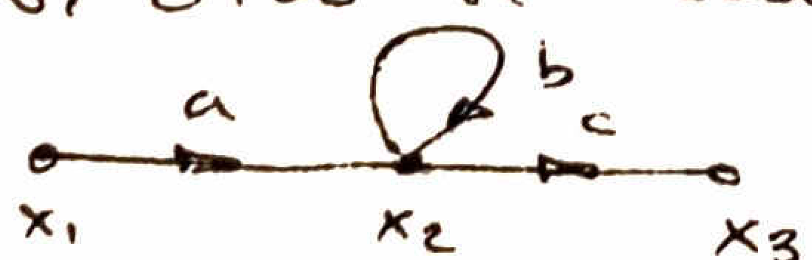
Caminos o trayectos directos entre y_0 y x_2

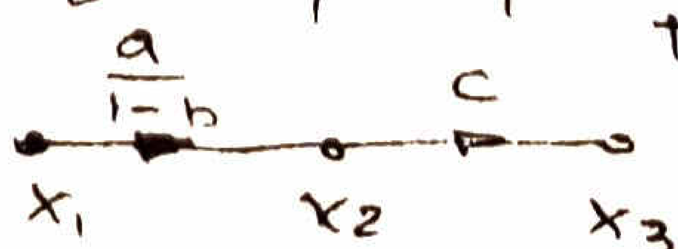
1) $y_0 x_2$ 3) $y_0 x_3 x_2$

2) $y_0 x_1 x_2$ 4) $y_0 x_3 x_1 x_2$

Bucles o lazos, caminos que parten de un vértice y llegan al mismo pasando por otros siempre que no se repita ninguno de ellos.

Si partimos de un vértice y llegamos al mismo sin pasar por otro se llama lazo propio.





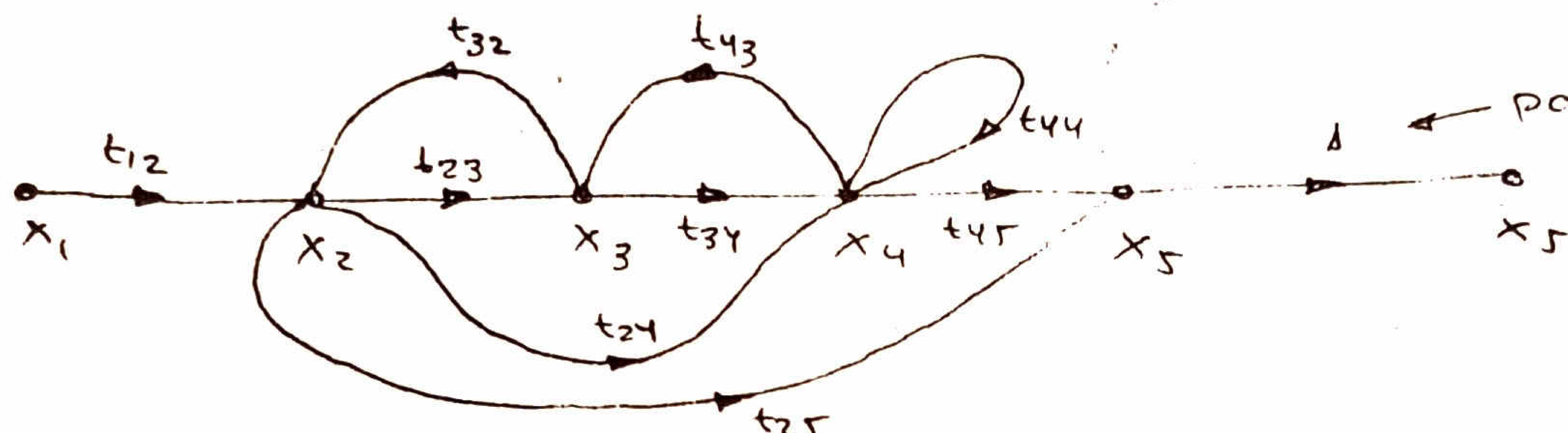
Todas las ramas entrantes vendrán divididas por 1-b.

$x_2 = a x_1 + b x_2$

$x_2(1-b) = a x_1$ } $\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{1-b}$



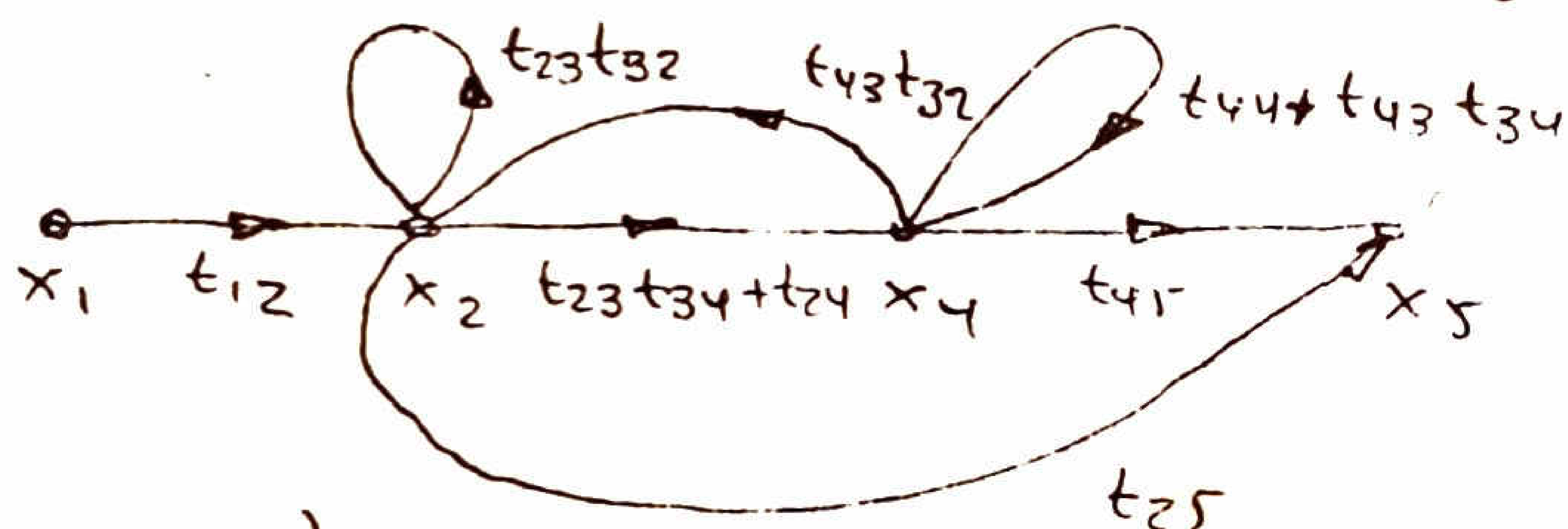
REGLA DE MASON



Nos piden por ejemplo $\frac{x_5}{x_1}$

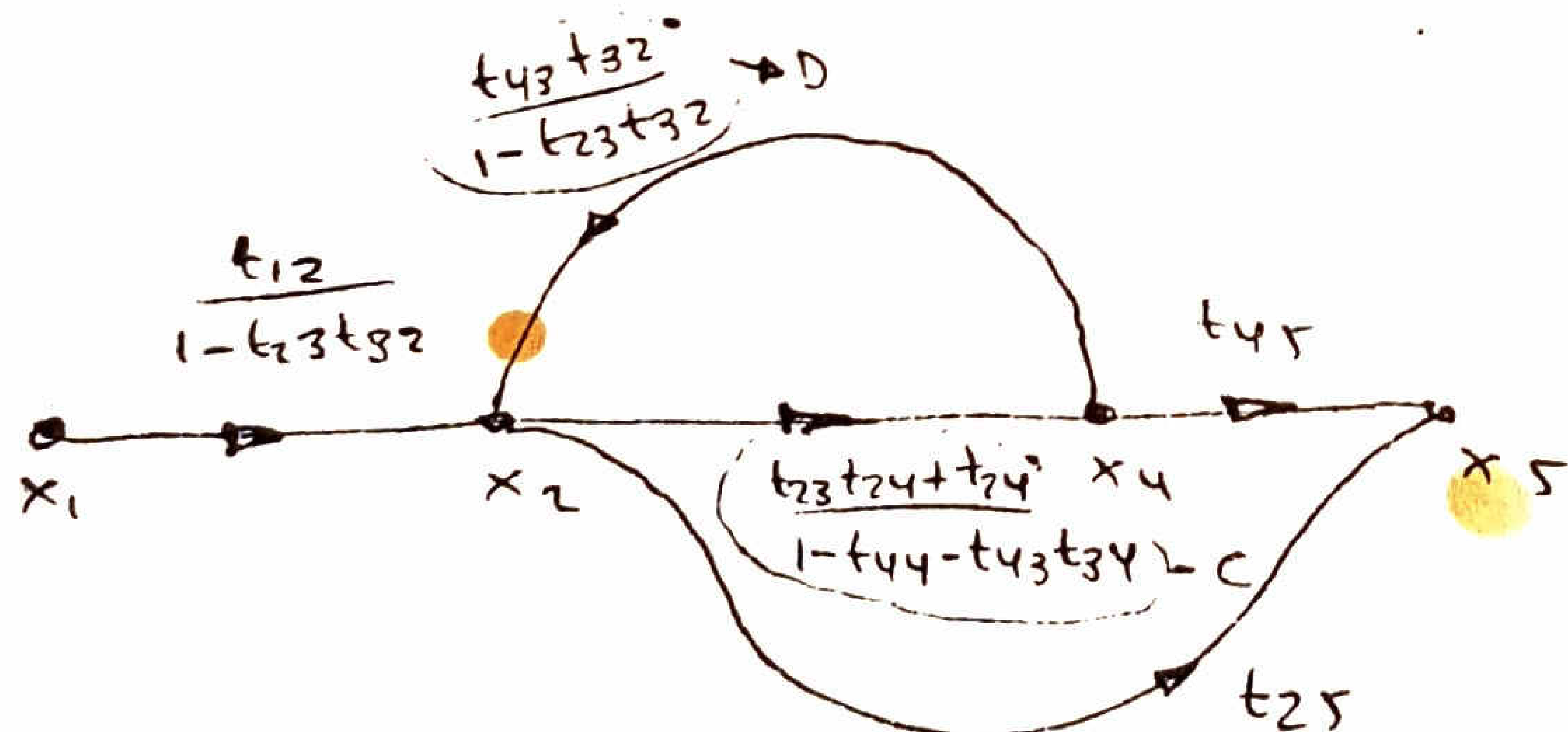
Vamos a eliminar el x_3

$$x_3 = t_{23} x_2$$
$$x_2 = t_{32} x_3$$
$$x_2 = t_{23} t_{32} x_2$$



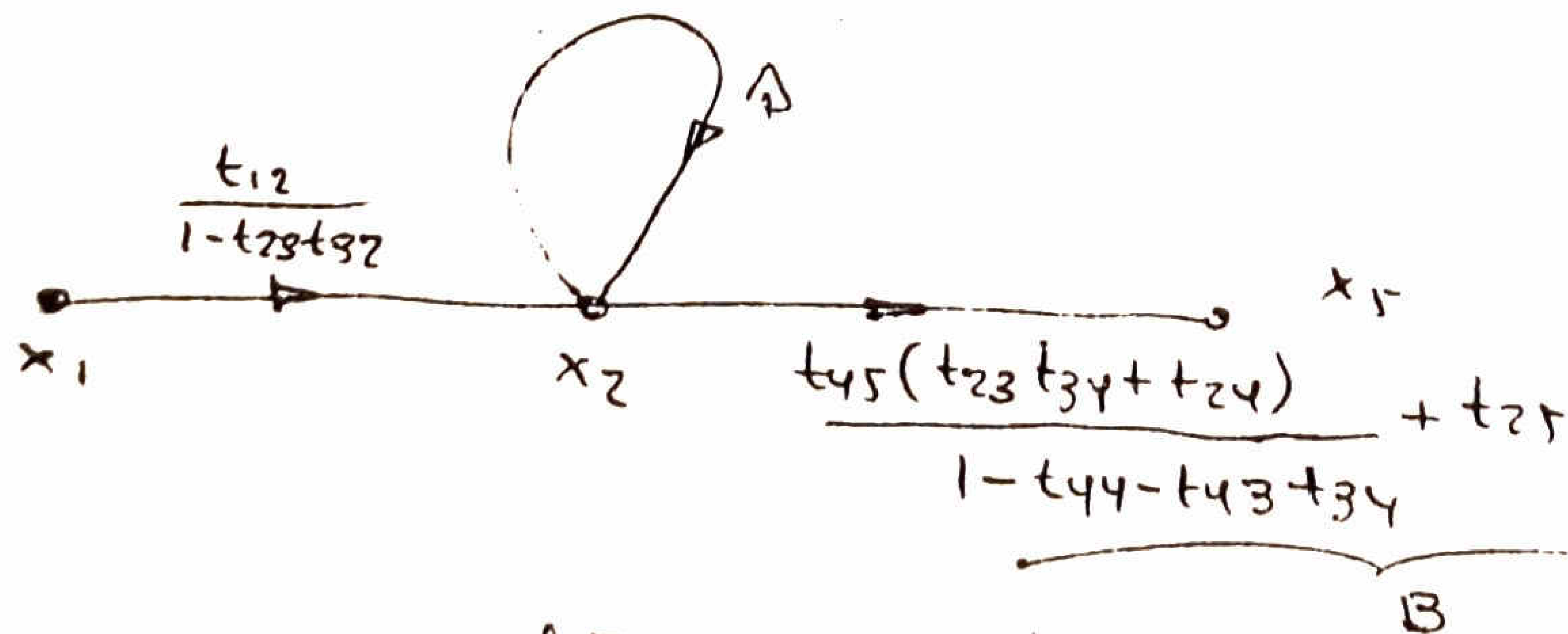
Hay que tomar todos los caminos posibles

Vamos a eliminar los lazos propios.

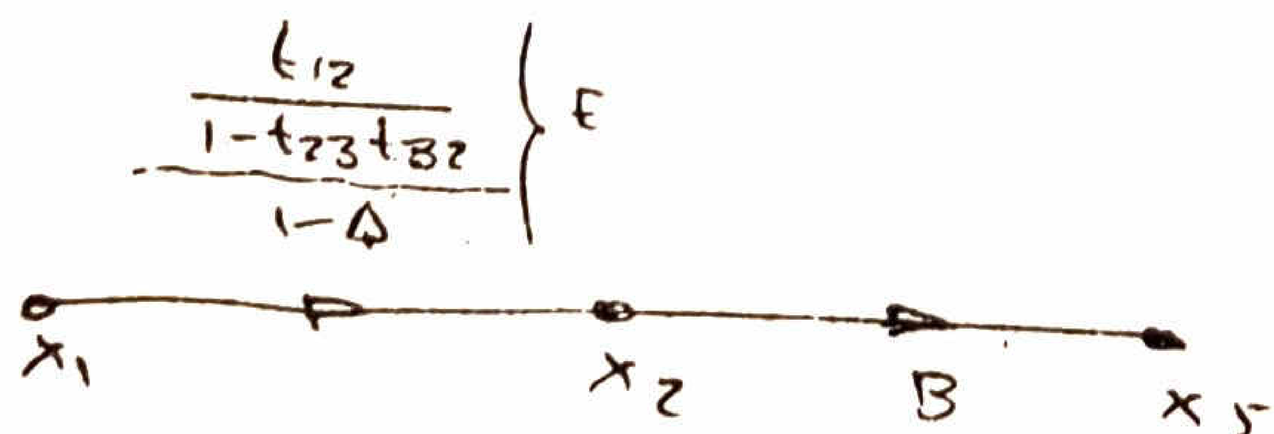


Vamos a eliminar el nudo x_4

$$\Delta = C \cdot D$$



Vamos a eliminar los lazos propios.

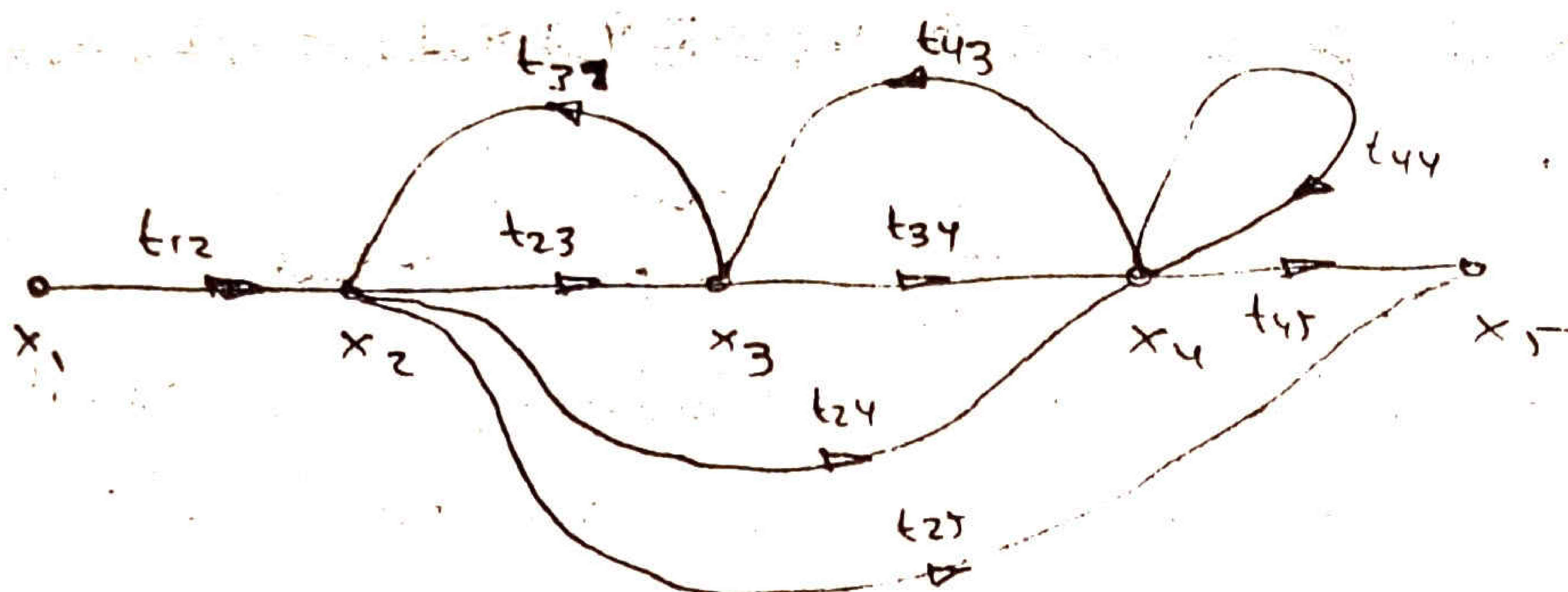


Eliminamos x_2



Si nos piden $\frac{x_5}{x_1} = \frac{\sum_n T_u \Delta_u}{\Delta} = \frac{T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + T_3\Delta_3}{\Delta}$

u es un nº finito y depende de la complejidad del sistema.



T son todos los posibles caminos (trayectorias directas) que podemos ver entre x_5 y x_1

Caminos	Funcion de transferencia del camino
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	$T_1 = t_{12} t_{23} t_{34} t_{45}$
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5$	$T_2 = t_{12} t_{24} t_{45}$
$x_1\, x_2\, x_5$	$T_3 = t_{12} t_{25}$

vemos que $u = 3$.

$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots$

$\sum L_1$ es la suma de todas las ganancias de todos los lazos propios e impropios que veamos en el circuito

$\sum L_2$ Es la suma de todas las combinaciones de los productos de todos los lazos disjuntos (no tienen ningun vertice comun) tomados de dos en dos

$\sum L_3$ Son la suma de todas las combinaciones de los productos de tres lazos disjuntos.

Lazos	Funcion de transferencia
$x_2\, x_3\, x_2$	$t_{23} t_{32}$
$x_2\, x_4\, x_3\, x_2$	$t_{24} t_{43} t_{32}$
$x_3\, x_4\, x_3$	$t_{34} t_{43}$
$x_4\, x_4$	t_{44}

son disjuntos ($x_2 x_3 x_2$ y $x_4 x_4$)

El lazo $x_3 x_2 x_3$ es el mismo que $x_2 x_3 x_2$

$$\Delta = 1 - \underbrace{(t_{23}t_{32} + t_{24}t_{43}t_{32} + t_{34}t_{43} + t_{44})}_{\sum L_1} + t_{23}t_{32}t_{44}$$

Δ_1 es el valor de Δ obtenido en un diagrama de flujos quitando los nudos por el cual pasa el camino uno (por donde pasa x_1 en T_1)

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$ Quitamos el $x_2\, x_3\, x_4\, x_5$, luego en la tabla de lazos vamos quitando $x_2 x_3 x_4$ ó x_5 con lo cual nos quedamos sin lazos

$\Delta_1 = \Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 = 1$

Δ_2 Quitamos de $x_1 x_2 x_4 x_5$ el $x_2\, x_4$ o el x_5 con lo cual.

...ios que quedan ... lo mismo.

$\Delta_2 = \Delta = 1$

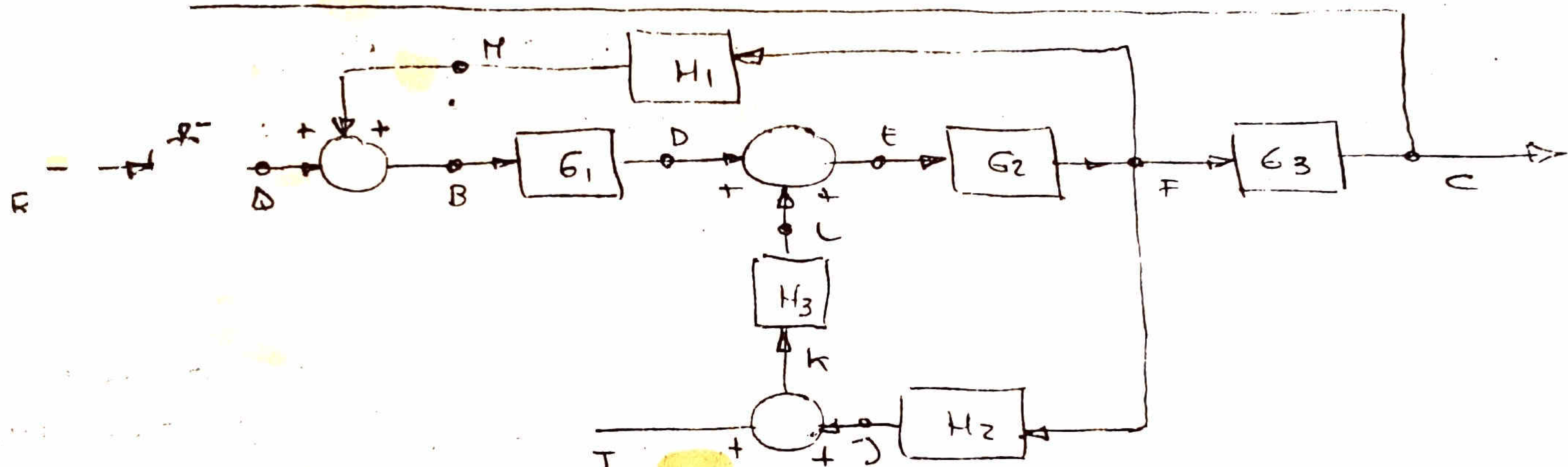
Δ_3 de $x_1 x_2 x_5$ quitamos $x_2 x_5$ en la tabla de lazos y nos quedan los lazos $x_3 x_4 x_5$

$$\Delta_3 = 1 - \Sigma L_1 - \Sigma L_2 = 1 - t_{44} - t_{34} t_{43}$$

$$\frac{x_5}{x_1} = \frac{T_1 + T_2 + T_3 [1 - t_{44} - t_{34} t_{43}]}{\Delta}$$ función de transferencia total.

El Δ vale para todos los casos, es decir, nos valdría si por ejemplo quisieramos $\frac{x_3}{x_1}$ lo que variaría sería el numero de caminos directos.

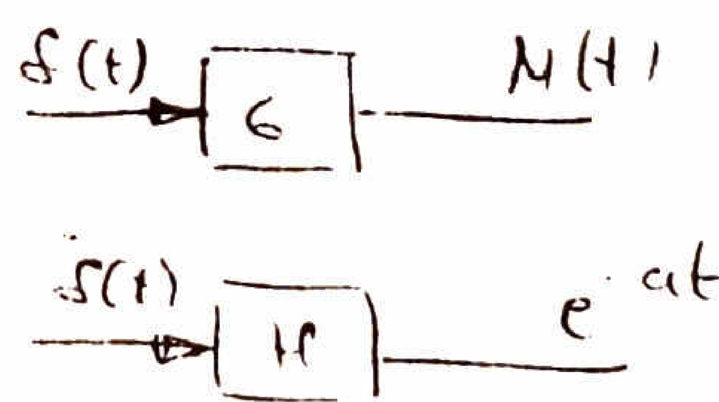
SISTEMA CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES (independientes)



$R = u(t)$ (escalon)

$T = \delta(t)$ (impulso de Dirak)

¿C?



Si el sistema es lineal $C_{TOTAL} = C_1 + C_2$

C_1 es la salida debida a R

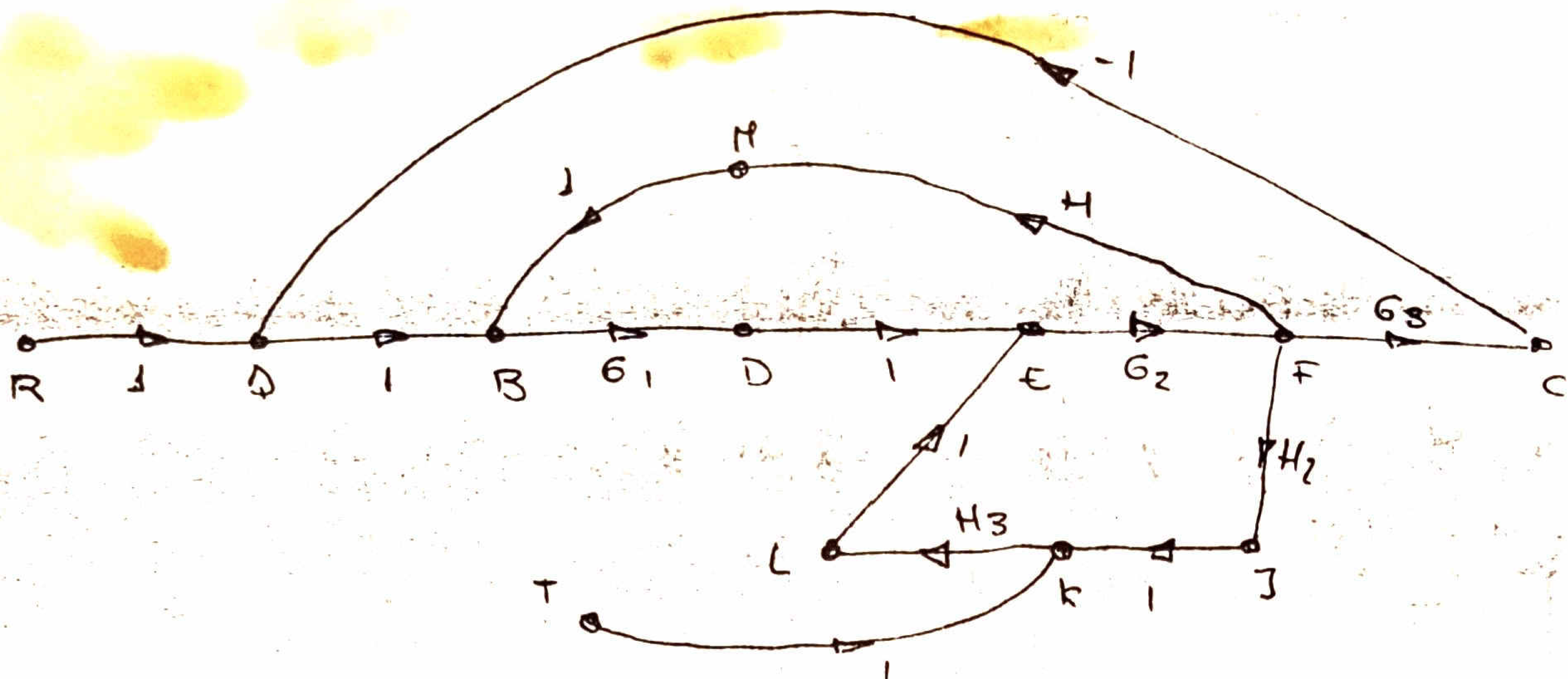
C_2 es " " " a T

$C = f(T, R)$

$$\Delta c = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right) \Delta T + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \Delta R$$

Se calcula la función de transferencia entre C y R se la multiplica por la transformada de R y tenemos la salida debida a R.

Se calcula la función de transferencia entre C y T, se le multiplica por $\delta[T]$ y tenemos la salida debida a T. La salida total es la suma de los dos que hemos obtenido debido a que es un sistema lineal.



Vamos a calcular $\frac{C}{R}$ (Aplicando Mason)

Caminos directos.	Función de transferencia
RABDEFC	$T_1 = G_1 G_2 G_3$

Ahora veamos $\frac{C}{T}$

TKLEFC	$T_1' = H_3 G_2 G_3$

Lazos $\frac{C}{R}$	Función de transferencia	Lazos $\frac{C}{T}$	Función de transferencia
ABDEFCA	$-G_1 G_2 G_3$		Los mismos.
BDEFMB	$G_1 G_2 H_1$		
EFJKLE	$G_2 H_2 H_3$		

$\mathcal{L}[R] = \frac{1}{p}$

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

$$C_{TOTAL} = \frac{G_1 G_2 G_3 \cdot 1}{1 - G_1 G_2 H_1 - G_2 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3} \cdot \frac{1}{p} +$$

$$+ \frac{H_3 G_2 G_3 (1)}{1 - G_1 G_2 H_1 - G_2 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3}$$

Ahora hay que dar la C_{TOTAL} en el dominio del tiempo, para ello hay que hallar la antitransformada.

$$C_{TOTAL} = \frac{\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2(p+a)}}{1 - \frac{1}{p^2(p+a)} - \frac{1}{p(p+a)^2} + \frac{1}{p^3}} = \frac{\sum a_i p^i}{\sum b^u p^u}$$

METODO PARA CALCULAR RAICES

$p^3 + 2p^2 + 4p + 4 = 0$

	1	2	4	4
-1		-1	-1	-3
	1	1	3	(+1)

	1	2	4	4
-2		-2	0	-8
	1	0	4	(-4)

cojemos dos raices que den de resto signo contrario y decimos que:

$-2 < p_0 < -1$

polinomio para p=1

$$P_1 = -1 - \frac{P(-1)}{P'(-1)} = -1 - \frac{1}{3} = -1'333$$

derivada del polinomio para p=1

La otra raíz que habrá que probar será.

$$P_2 = -1'333 - \frac{P(-1'333)}{P'(-1'333)} = -1'296$$

Tomaríamos otra nueva raíz:

$$P_3 = -1'296 - \frac{P(-1'296)}{P'(-1'296)} = -1'290$$

esta ya sería la raíz verdadera entonces.

	1	2	4	4
$-1'290$		$-1'290$		
	1			

0 aproximadamente

con lo cual ya tendríamos una ecuación de 2º grado y podríamos hallar las raíces fácilmente.